Lucrare elaborată în conformitate cu Programa Şcolară aprobată prin Ordinul Ministrului Educaţiei, Cercetării şi Tineretului nr. 5097 din 09.09.2009 şi avizată de Comisia Naţională de Matematică din Ministerul Educaţiei şi Cercetării cu nr. 36684/1996, nr. 25216/1999 şi nr. 4686/2003 pentru folosirea în clasă şi pregătirea suplimentară a elevilor.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Editor: Călin Vlasie

Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Coperta colecţiei: Ionuţ Broştianu
Prepress: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ZAHARIA, MARIA
Matematică : Algebră, Geometrie : clasa a VI-a / Maria Zaharia, Dan Zaharia ; coord.: Radu Gologan. - Ed. a 2-a, rev. - Piteşti : Paralela 45, 2013-
2 vol.
ISBN 978-973-47-1712-5
Semestrul 1. - 2013. - ISBN 978-973-47-1713-2

I. Zaharia, Dan
II. Gologan, Radu (coord.)

512(075.33)
514(975.33)

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Piteşti, jud. Argeş, cod 110174, str. Fraţii Goleşti 130
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444
0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492.
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la *Graficprint*
www.graficprint.eu
e-mail: comenzi@graficprint.eu

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

colecţie coordonată
de Radu GOLOGAN,
preşedinte al Societăţii de Ştiinţe
Matematice din România

algebră
geometrie

Soluţiile testelor de autoevaluare pot fi consultate la adresa:
http://www.edituraparalela45.ro/download/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa6_sem1.rar

clasa a VI-a

partea I

ediţia a II-a, revizuită

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂŢARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Abreviieri:

* Inițiere (înțelegere)

** Consolidare (aplicare și exersare)

*** Excelență (aprofundare și performanță)

**** Supermate

Legendă

PE = portofoliul elevului

PP = portofoliul profesorului

PE-PP = portofoliul elevului - portofoliul profesorului

Pentru elevi: intrați pe www.Qvis.ro și puteți completa electronic PORTOFOLIUL ELEVULUI

Pentru profesori: intrați pe www.Qedu.ro și puteți completa electronic PORTOFOLIUL PROFESORULUI

Recapitulare și evaluare inițială

PP **Competențe specifice:**

C1. Utilizarea operațiilor și a proprietăților acestora în calcule cu numere naturale/raționale pozitive

C2. Utilizarea de algoritmi pentru divizibilitate cu 10, 2 și 5

C3. Identificarea și utilizarea noțiunilor specifice teoriei mulțimilor

C4. Transpunerea unei situații-problemă în limbaj matematic/limbajul ecuațiilor, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

C5. Alegerea formei de reprezentare a unui număr rațional pozitiv și utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calculului cu fracții zecimale

C6. Transpunerea în limbaj specific geometriei a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură

PE 1. Exercițiii și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

A.

1. Se dau mulțimile: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x \text{ este cifră}\}$ și $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 3x + 2 \leq 14\}$.

a) Arătați că $A \subset B$ și $A = C$.

b) Calculați: $B \cup C$, $B \cap C$ și $B - C$.

2. Calculați: $20 \cdot [120 : 6 + 5 \cdot (23 - 7 \cdot 3) : 2]$.

3. Transformați fracțiile ordinare $\frac{98}{16}$, $\frac{11}{9}$ și $\frac{37}{30}$ în fracții zecimale.

4. Transformați fracțiile zecimale 1,24; 2,(18) și 2,1(3) în fracții ordinare ireductibile.

5. Câtul împărțirii unui număr la 23 este 4, iar restul este 11. Aflați numărul.

6. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $2 \cdot (x + 7) - 14 = 28$.

7. Din triplul unui număr se scade 7, rezultatul obținut se împarte la 5, iar noul rezultat se micșorează cu 2 și se obține 3. Aflați numărul.

8. Calculați: $0{,}15 \cdot 1{,}2 + 6{,}25 : 2{,}5$.

9. Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 70$ cm, $l = 0{,}35$ m și $h = 450$ mm. Aflați capacitatea, în litri, a acvariului.

B.

1. Se dau mulţimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5x + 2 \geq 7 \text{ şi } 5x + 2 \leq 17\}$ şi $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}^* \text{ şi } y < 3\}$. Calculaţi: $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.

2. Calculaţi: $32 : 16 + \{76 - 2 \cdot [(20 + 4 \cdot 5) : 5 + 2 \cdot 6\}$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ inecuaţia: $6 \cdot [(2x + 1) \cdot 3 - 5] \leq 356$.

4. Într-o tabără sunt de două ori mai mulţi băieţi decât fete. Dacă din tabără ar pleca 14 băieţi şi ar veni 28 de fete, atunci numărul băieţilor ar deveni egal cu numărul fetelor. Aflaţi câţi băieţi şi câte fete sunt în tabără.

5. Mihai are o colecţie de 632 de timbre. El aranjează timbrele într-un clasor, câte 25 de timbre pe fiecare pagină. Aflaţi de câte pagini are nevoie Mihai.

6. Calculaţi: $10 \cdot [0{,}57 + (20{,}03 - 7{,}5) : 0{,}1 - 0{,}57]$.

7. Aflaţi două numere, ştiind că media lor aritmetică este 6,06 şi câtul numerelor este 14,15.

8. Într-un vas sunt 6 dm^3 de lichid. Dacă se mai adaugă 0,05 m^3 de lichid, capacitatea vasului se depăşeşte cu 3000 cm^3. Aflaţi câţi litri de lichid încap în vas.

9. În Roma antică un bărbat i-a lăsat soţiei, prin testament, 3500 de dinari. La moartea lui, soţia era însărcinată. După legile romane, soţia urma să împartă moştenirea astfel: dacă năştea un fiu, ea primea jumătate din cât ar fi primit fiul, iar dacă năştea o fiică, ea primea de două ori mai mult decât ar fi primit fiica. Dacă va naşte gemeni, un băiat şi o fată, câţi dinari va primi văduva?

(Concursul European de Matematică Aplicată „Cangurul", 1998)

PE-PP 2. Modele de teste pentru evaluarea iniţială

- *La toate testele, pentru rezolvarea corectă a cerinţelor din Partea I şi Partea a II-a se acordă 9 puncte. Din oficiu se acordă 1 punct.*
- *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 45 de minute.*

TESTUL 1

Partea I. Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $10 + 10 : 2$ este egal cu:
A. 10 B. 15 C. 18 D. 22

(0,5p) **2.** Se consideră mulţimile: $A = \{1, 2, 5, 7\}$ şi $B = \{5, 7, 10, 11\}$. Cel mai mic număr natural care aparţine mulţimii $A \cap B$ este:
A. 1 B. 2 C. 7 D. 5

(0,5p) **3.** Cifra x pentru care numărul $\overline{41x}$ este divizibil cu 3 poate fi:
A. 1 B. 0 C. 9 D. 3

(0,5p) **4.** Rezultatul calculului $2^3 - 5^0 + 187 : 17$ este egal cu:
A. 19 B. 20 C. 18 D. 14

(0,5p) **5.** Numărul 1,25 transformat în fracţie ordinară este egal cu:
A. $\frac{7}{10}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{3}{10}$

(0,5p) **6.** Media aritmetică a numerelor 1,47 şi 3,53 este egală cu:
A. 1,75 B. 2 C. 3,5 D. 1,25

(0,5p) **7.** Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 8 cm şi lăţimea cu 2 cm mai mică decât lungimea este egal cu:
A. 18 cm B. 28 cm C. 14 cm D. 21 cm

(0,5p) **8.** Transformând 25 ari în m^2 se obţine:
A. 250 m^2 B. 2500 m^2 C. 2,5 m^2 D. 0,25 m^2

(0,5p) **9.** Rezultatul calculului $\frac{9}{10} - \frac{7}{10} + \frac{3}{10}$ este egal cu:
A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

Partea a II-a. Scrieţi rezolvările complete.

(0,9p) **10.** Calculaţi $2013^0 + 0^{2013} + 1^{2014} + 3^2$.

(0,9p) **11.** Rezolvaţi, în mulţimea numerelor naturale, ecuaţia $3{,}1x - 25 = 6$.

(0,9p) **12.** Alexandra a citit 20% din lecturile suplimentare. Calculaţi câte pagini a avut de citit Alexandra, dacă mai are de citit 40 de pagini.

(0,9p) **13.** Un automobil parcurge distanţa de 60 km într-o oră. Calculaţi câţi metri parcurge automobilul într-un minut, ştiind că viteza sa este constantă.

(0,9p) **14.** Împărţind numărul natural nenul a la numărul natural nenul b se obţine câtul 2 şi restul 7. Arătaţi că $4a - 8b - 1$ este cubul unui număr natural.

TESTUL 2

Partea I. Scrieţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $3 + 2 \cdot 11(2 \cdot 11) - 12 : 4$ este egal cu:
A. 10 B. 20 C. 22 D. 16

(0,5p) **2.** Se consideră mulţimile: $A = \{1, 3, 4, 7\}$ şi $B = \{1, 2, 4, 8\}$. Numărul elementelor mulţimii $A \cap B$ este egal cu:
A. 0 B. 3 C. 2 D. 1

(0,5p) **3.** Suma tuturor numerelor care împărţite la 7 dau câtul 5 este egală cu:
A. 195 B. 175 C. 185 D. 205

(0,5p) **4.** Produsul cifrelor x pentru care $\overline{42x}$ este divizibil cu 3 este:
A. 18 B. 0 C. 12 D. 6

(0,5p) **5.** Media aritmetică a numerelor 3,75 şi 4,25 este egală cu:
A. 4,05 B. 3,90 C. 4,10 D. 4

(0,5p) **6.** Rezultatul calculului $\frac{11}{7} + \frac{8}{7} - \frac{5}{7}$ este egal cu:
A. 2 B. 1 C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{5}{7}$

(0,5p) **7.** Perimetrul unui pătrat este de 12 cm. Aria pătratului este egală cu:

A. 9 B. 16 C. 25 D. 36

(0,5p) **8.** Transformând 23 ha în m^2 se obține:

A. 230 m^2 B. 230 000 m^2 C. 2300 m^2 D. 23 000 m^2

(0,5p) **9.** Fracția $\frac{12}{5}$ scrisă ca număr zecimal este egală cu:

A. 2,4 B. 2,6 C. 2,5 D. 3

Partea a II-a. Scrieți rezolvările complete.

(0,9p) **10.** Scrieți elementele mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{15}{x} \in \mathbb{N}\right\}$.

(0,9p) **11.** Mihaela își cumpără o trusă de geometrie cu 30 lei. Calculați câți lei mai are Mihaela dacă trusa a costat $\frac{1}{3}$ din suma pe care o avea.

(0,9p) **12.** Efectuați calculele: $(3+3^2):2^2-2014^0+1^{2013}$.

(0,9p) **13.** Scrieți numărul natural care împărțit la un număr de o cifră dă câtul 10 și restul 8.

(0,9p) **14.** Scrieți toate numerele de forma $\overline{7xy}$ divizibile cu 5, știind că $x = y + 1$.

TESTUL 3

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Se dau mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $x < 10\}$, $B = \{x \mid x \in A$ și x este impar$\}$. Cel mai mare număr natural care aparține mulțimii $A - B$ este:

A. 9 B. 8 C. 10 D. 2

(0,5p) **2.** Rezultatul calculului $(28 - 4 \cdot 2) : 2$ este:

A. 14 B. 5 C. 24 D. 10

(0,5p) **3.** Numărul de 11 ori mai mic decât 825 este egal cu:

A. 75 B. 814 C. 57 D. 65

(0,5p) **4.** Numărul 2,75 transformat într-o fracție ordinară este egal cu:

A. $\frac{2}{75}$ B. $\frac{11}{4}$ C. $\frac{137}{5}$ D. $\frac{11}{2}$

(0,5p) **5.** Cel mai mare număr de forma $\overline{302x}$ divizibil cu 3 este:

A. 3025 B. 3026 C. 3027 D. 3028

(0,5p) **6.** Dintre numerele $a = 3^{25}$, $b = 27^{12}$, $c = 3^{30} \cdot 3^5$ și $d = (3^5)^7$, cel mai mare este:

A. a B. b C. c D. d

(0,5p) **7.** Rezultatul calculului 2 dag + 1,3 hg – 4,3 g, exprimat în g, este:

A. 14,97 B. 145,7 C. 1497 D. 28,7

(0,5p) **8.** Soluția ecuației $0{,}2 \cdot x - 1{,}2 = 2{,}6$ este:

A. 1,9 B. 19 C. 6,5 D. 3,8

(0,5p) **9.** Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 10 cm și lățimea de 6 cm este egal cu:

A. 3,2 cm B. 32 cm^2 C. 32 cm D. 32 cm^3

Partea a II-a. Scrieți rezolvările complete.

10. O cofetărie dispune de cel mult 650 de lei pentru a prezenta prăjituri la o expoziție. Un kilogram de prăjituri costă 5 lei și închirierea spațiului pentru expoziție costă 150 lei.

(0,9p) a) Câți lei cheltuiește cofetăria pentru a expune 8 kg de prăjituri?

(0,9p) b) Care este cantitatea maximă de prăjituri cu care se poate prezenta cofetăria la expoziție pentru a se încadra în suma de bani de care dispune?

11. Mihai, Mihaela și Costin au împreună 200 lei. Jumătate din suma lui Mihai este egală cu o treime din suma Mihaelei și cu o cincime din suma lui Costin.

(0,9p) a) Dacă Mihai are x lei, Mihaela are y lei și Costin are z lei, iar jumătatea lui x este p, arătați că Mihai are $(2p)$ lei, Mihaela are $(3p)$ lei și Costin $(5p)$ lei.

(0,9p) b) Aflați care este suma de bani de care dispune fiecare copil.

(0,9p) **12.** Calculați: $0{,}1 \cdot \{4 + 10^3 \cdot [100 \cdot 0{,}01 + 5{,}2 \cdot (4 - 1{,}2 \cdot 0{,}1)]\}$.

TESTUL 4

Partea I. Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) **1.** Se dau mulțimile: $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*$ și $x \le 9\}$, $N = \{x \mid x \in M$ și x este par$\}$. Numărul de elemente al mulțimii $M - N$ este:

A. 8 B. 6 C. 5 D. 4

(0,5p) **2.** Rezultatul calculului $(14 + 2 \cdot 4) : 2$ este:

A. 8 B. 9 C. 11 D. 32

(0,5p) **3.** Fracția ordinară $\frac{128}{50}$, transformată în fracție zecimală, este:

A. 2,(56) B. 2,5(6) C. 2,56 D. 0,256

(0,5p) **4.** Cel mai mic număr de forma $\overline{301x}$ divizibil cu 3 este:

A. 3011 B. 3012 C. 3015 D. 3013

(0,5p) **5.** Dintre numerele $2^5 \cdot 2^6$; $(2^3)^4$; $2^{37} : 2^{24}$ și 32^2, cel mai mic este:

A. $2^5 \cdot 2^6$ B. $(2^3)^4$ C. $2^{37} : 2^{24}$ D. 32^2

(0,5p) **6.** Rezultatul calculului 4 dg + 2,6 kg – 8,6 g, exprimat în g, este:

A. 2591,8 B. 29,14 C. 2914 D. 15,2

(0,5p) **7.** Soluția ecuației $0{,}2 \cdot x - 2{,}6 = 1{,}2$ este:

A. 19 B. 1,9 C. 38 D. 3,8

(0,5p) **8.** Aria suprafeței unui dreptunghi cu lungimea de 10 cm și lățimea de 6 cm este:

A. 60 cm B. 60 cm^2 C. 16 cm D. 60 cm^3

(0,5p) **9.** Numărul de 12 ori mai mic decât 996 este:

A. 83 B. 38 C. 984 D. 82

Partea a II-a. Scrieți rezolvările complete.

10. O cofetărie nu înregistrează pierderi, dar nici profit, dacă produce prăjituri la 5 lei per kilogram. Cofetăria închiriază un spațiu, cu o chirie lunară de 650 lei, și își propune să realizeze un profit de cel puțin 150 lei lunar, rezultat în urma producerii și vânzării prăjiturilor la 5 lei per kilogram.

(0,9p) a) Arătați că dacă cofetăria produce și comercializează 130 kg de prăjituri lunar, ea nu realizează niciun fel de profit, dar nu înregistrează pierderi.

(0,9p) b) Aflați cantitatea minimă de prăjituri care trebuie vândută și comercializată pentru ca profitul să fie de cel puțin 150 lei pe lună.

11. Mihai, Mihaela și Costin și-au cumpărat culegerea de probleme *Mate 2000*. Fiecare și-a plătit culegerea din suma de bani pe care a economisit-o. Mihaela a plătit culegerea cu o doime din suma economisită de ea, Mihai cu o treime din suma economisită de el, iar Costin cu o cincime din suma economisită de el.

(0,9p) a) Dacă culegerea ar fi costat 12 lei, aflați suma de bani economisită de fiecare copil.

(0,9p) b) Aflați costul real al culegerii, știind că, în fapt, suma economiilor celor trei copii este de 130 lei.

(0,9p) **12.** Calculați: $[(2{,}3 + 1{,}5) \cdot 12{,}5] : (2{,}05 - 1{,}25)$.

Aritmetică. Algebră

Capitolul I
Divizibilitatea numerelor naturale (I)

PP Competențe specifice:

C_1. Identificarea în exemple, în exerciții sau în probleme a noțiunilor: divizor, multiplu, numere prime, numere compuse

C_2. Aplicarea criteriilor de divizibilitate (cu 10, 2, 5, 3, 9) pentru descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

C_3. Exprimarea unor caracteristici ale relației de divizibilitate în mulțimea numerelor naturale, în exerciții și probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea

C_4. Deducerea unor proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale, în exerciții și probleme

PE-PP 1. Operații cu numere naturale. Reguli de calcul cu puteri

Se notează cu $\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ și cu $\mathbb{N}^*$ mulțimea numerelor naturale nenule: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Pe mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ definim următoarele operații: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere.

I. ADUNAREA

Definiție: Oricare ar fi două numere naturale a și b, există s, un număr natural unic determinat, numit **suma numerelor *a* și *b***, pe care îl notăm $s = a + b$.

Observații:

1. Operația prin care se obține suma a două numere naturale oarecare se numește **adunarea numerelor naturale.**

2. Adunarea numerelor naturale are următoarele proprietăți:

Asociativitatea, care exprimă faptul că într-o sumă de mai mulți termeni, rezultatul nu se schimbă dacă grupăm (asociem) termenii diferit:

$(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi a, b și c numere naturale.

Comutativitatea, care exprimă faptul că într-o sumă rezultatul nu se schimbă dacă schimbăm ordinea termenilor:

$a + b = b + a$, oricare ar fi a şi b numere naturale.

Numărul 0 este element neutru la adunare, adică

$a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi numărul natural a.

II. SCĂDEREA

Definiţie: Oricare ar fi două numere naturale a şi b, $a \geq b$, există d, un număr natural unic determinat, numit **diferenţa numerelor a şi b**, astfel încât $a = b + d$ şi pe care îl notăm: $d = a - b$.

Observaţii:

1. Operaţia prin care se obţine diferenţa a două numere naturale se numeşte **scăderea numerelor naturale**.

2. Numărul a se numeşte **descăzut** şi numărul b se numeşte **scăzător**.

3. Reamintim: scăderea este definită pe $\mathbb{N}$ doar dacă **descăzutul este mai mare decât scăzătorul**, adică $a \geq b$.

4. Scăderea nu este asociativă şi nu este comutativă.

5. Adunarea şi scăderea sunt operaţii de **ordinul întâi**.

III. ÎNMULŢIREA

Definiţie: Oricare ar fi două numere naturale a şi b, există un număr natural p unic determinat, numit **produsul numerelor a şi b** şi pe care îl notăm $p = a \cdot b$.

Observaţii:

1. Operaţia prin care se obţine produsul a două numere naturale se numeşte **înmulţirea numerelor naturale**.

2. Înmulţirea numerelor naturale are următoarele proprietăţi:

Asociativitatea, care exprimă faptul că într-un produs cu mai mulţi factori, rezultatul nu se schimbă dacă grupăm (asociem) factorii diferit:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b şi c.

Comutativitatea, care exprimă faptul că produsul nu se schimbă dacă schimbăm ordinea factorilor:

$a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a şi b.

Numărul 1 este element neutru la înmulţire, adică

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, oricare ar fi numărul natural a.

Distributivitatea înmulţirii faţă de adunare şi scădere, adică oricare ar fi a, b şi c numere naturale, atunci:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ şi $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

3. Un produs de numere naturale este zero dacă şi numai dacă cel puţin unul din factorii produsului este zero:

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $b = 0$.

4. Dacă unul din factorii unui produs este zero, atunci produsul este zero:

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, oricare ar fi numărul natural a.

5. În suma $a \cdot b + a \cdot c$, numărul a se numeşte **factor comun** şi notăm:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ şi $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$.

IV. ÎMPĂRŢIREA

Definiţie: Oricare ar fi două numere naturale a şi b, $b \neq 0$, există c un număr natural unic determinat, numit **câtul exact al numerelor a şi b**, astfel încât $a = b \cdot c$ şi pe care îl notăm $c = a : b$.

Observaţii:

1. Operaţia prin care se obţine câtul a două numere naturale se numeşte **împărţirea exactă** a numerelor naturale.

2. Numerele care se împart se numesc **factori**. Numărul care se împarte se numeşte **deîmpărţit**, numărul la care se împarte se numeşte **împărţitor**, iar numărul care arată de câte ori se cuprinde împărţitorul în deîmpărţit se numeşte **cât**.

3. Reamintim: Împărţirea exactă pe mulţimea $\mathbb{N}$ este definită dacă împărţitorul este diferit de zero şi deîmpărţitul este un multiplu al împărţitorului.

4. Împărţirea exactă nu este asociativă şi nu este comutativă.

5. Pentru orice număr natural nenul a, avem $0 : a = 0$.

6. Împărţirea exactă este operaţia inversă înmulţirii. Ea poate fi privită ca o scădere repetată.

7. Înmulţirea şi împărţirea exactă sunt operaţii de **ordinul al doilea.**

Definiţie: Pentru orice numere naturale a şi b, $b \neq 0$, există numerele naturale q şi r unic determinate, numite **cât** şi **rest**, astfel încât $a = bq + r$, unde $r < b$.

Observaţie: Operaţia prin care se obţin **câtul** şi **restul** a două numere naturale se numeşte **împărţirea cu rest** a două numere naturale.

V. RIDICAREA LA PUTERE

Definiţie: Pentru orice două numere naturale a şi n există un număr natural unic determinat numit **puterea a n-a a numărului natural a**, notat a^n, şi care prin definiţie este: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$.

Observaţii:

1. Operaţia prin care se obţine **puterea** unui număr natural se numeşte **ridicarea la putere.**

2. Numărul a se numeşte **baza puterii**, iar numărul n se numeşte **exponentul puterii**.

3. Dacă $a \neq 0$, iar $n = 0$, atunci **puterea zero**, a^0, va fi, prin definiţie, 1. Nu se defineşte în schimb 0^0.

4. Operaţia de ridicare la putere are următoarele **reguli de calcul**:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

b) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

d) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

e) $(a : b)^m = a^m : b^m$, unde $a, b, m, n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

5. Ridicarea la putere este operaţie de **ordinul al treilea.**

În continuare vom reaminti două **reguli de efectuare a calculelor** în cadrul unor exerciții:

1. Dacă într-un exercițiu nu sunt paranteze, atunci operațiile se efectuează de la stânga la dreapta în următoarea ordine: întâi se efectuează operațiile de ordinul al treilea, apoi cele de ordinul al doilea și, în final, cele de ordinul întâi.

2. Dacă într-un exercițiu există paranteze, atunci se efectuează mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele pătrate și apoi cele din acolade, iar în interiorul fiecărei paranteze se respectă regulile de calcul de la punctul 1.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Scrieți toate numerele naturale de trei cifre care se pot forma cu ajutorul cifrelor 2, 3 și 0.

2. Scrieți toate perechile de numere naturale nenule a căror sumă este 11.

3. Scrieți toate perechile de numere naturale nenule al căror produs este 12.

4. Calculați:
a) $1^3 + 0^{2014} + 2014^0$; b) $3^2 + 2^3 + 2013^1 - 1^{2013}$;
c) $5^2 - 10^1 + 8 : 4 + 7^0 + 0^7$; d) $6^0 + 1^6 + 10^2 - 7^2 + 2014^0$.

5. Scrieți sub formă de putere, utilizând regula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:
a) $2^3 \cdot 2^5$; b) $3^4 \cdot 3^7$; c) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3$; d) $7^x \cdot 7^{x+1}$.

6. Calculați utilizând regula $a^m : a^n = a^{m-n}$:
a) $2^{17} : 2^{15}$; b) $3^{11} : 3^7 : 3^2$; c) $(5^{21} : 5^{19}) : 5$; d) $7^{2014} : 7^{2013}$.

7. Aflați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $2x + 7 = 11$; b) $3x - 7 = 11$; c) $14 - x = 5$.

8. Determinați câtul și restul următoarelor împărțiri:
a) $24 : 35$; b) $2013 : 13$; c) $5732 : 201$.

9. Scrieți care pot fi resturile împărțirii unui număr natural la 5.

10. Scrieți dacă relația $27 = 4 \cdot 5 + 7$ reprezintă teorema împărțirii cu rest și justificați răspunsul dat.

PE Aplicare și exersare **

11. Comparați numerele:
a) 4^{301} cu 2^{60}; b) 3^{17} cu 9^8; c) 25^{11} cu 5^{23}.

12. Determinați numărul n pentru care avem:
a) $2^n < 50$; b) $3^n < 90$; c) $23 < 2^n < 90$; d) $3^n < 30 < 3^{n+1}$.

13. Utilizând regula $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, scrieți sub forma unei singure puteri:
a) $(2^3)^2$; b) $(3^2)^3$; c) $\left[\left(19^4\right)^{10}\right]^5$; d) $\left[\left(5^3\right)^6\right]^4$.

14. Calculați dând factor comun:
a) $27 \cdot 13 + 27 \cdot 42 + 27 \cdot 29 + 27 \cdot 16$; b) $132 \cdot 57 + 327 \cdot 57 + 274 \cdot 57 + 267 \cdot 57$;
c) $2014 + 2014 \cdot 2015 - 2016 \cdot 2013$; d) $2016 \cdot 1957 - 1957 \cdot 2014 + 1957 \cdot 9 - 1957$.

15. Calculați și apoi comparați numerele:
a) $(2 + 3)^2$ cu $2^2 + 3^2$; b) $(11 - 7)^2$ cu $11^2 - 7^2$.

16. Calculați cel mai mic număr natural de patru cifre care la împărțirea cu:
a) 23 dă restul 19; b) 17 dă restul 11.

17. Aflați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $5x + 1 \leq 13$; b) $3(x - 4) \leq 5$;
c) $2(x - 5) < 10$; d) $2x + 5 > 3x$.

18. Grupați convenabil și efectuați calculele:
a) $17 + 28 + 35 + 233 + 22 + 85$; b) $475 + 119 + 387 - 175 - 19 - 187$;
c) $423 + 513 + 174 + 377 + 287 + 626$; d) $743 + 581 + 446 - 543 - 181 - 346$.

19. a) Dacă $a + b = 9$ și $c = 5$, calculați $ac + bc$.
b) Dacă $a - b = 4$ și $c = 10$, calculați $ac - bc$.
c) Dacă $xz + yz = 28$ și $x + y = 7$, calculați pe z.
d) Dacă $xz - yz = 847$ și $z = 11$, calculați $x - y$.

20. Calculați cel mai mare număr natural de patru cifre care la împărțirea cu:
a) 32 dă restul 13; b) 49 dă restul 17.

21. Aflați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $3(2x - 1) = 141$; b) $8x + 10 = 6x + 18$;
c) $29 - 5(x + 1) = 4$; d) $2(3x - 1) = 3(x + 2) + 4$;
e) $[37 - (x - 1) \cdot 3] \cdot 2 = 14$; f) $[(x - 3) \cdot 2 + 7] : 5 = 15$.

22. Comparați numerele:
a) 16^{17} cu 8^{34}; b) 27^{25} cu 3^{75}; c) 10^{1000} cu 100^{100}.

23. Aflați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $129 - x \leq 89$; b) $6x - 11 > 8x - 27$;
c) $3(x - 2) + 2013 > x + 2014$; d) $3[15 - (x - 1) \cdot 2] + 5 \geq 20$.

24. Calculați:
a) $2^{19} \cdot 7^{19} - 14^{19}$; b) $3^{10} \cdot 2^{10} - 6^{11} : 6$;
c) $10^{33} : 5^{33} : 2^{2^5}$; d) $15^{27} : 5^{27} - 3^{5^2}$.

25. Ordonați crescător:
a) $3^{35}; 9^{18}; 27^{11}$; b) $2^{61}; 4^{29}; 8^{20}$.

PE Aprofundare și performanță ***

26. Calculați sumele:
a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$; b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$;
c) $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$; d) $5 + 10 + 15 + \ldots + 100$;
e) $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 139$; f) $2000 + 2001 + 2002 + \ldots + 2010$.

27. Calculați respectând ordinea efectuării operațiilor:
a) $[(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 - 2^8 : 2^6] : 4 - 2^3 \cdot 5^2$;
b) $2^{77} : (2^5 \cdot 2^{10})^5 + 5 \cdot (352 - 350 : 2)$;
c) $7^{39} : (7^2 \cdot 7^{33}) \cdot (7^2 + 7 \cdot 25) : 14$;
d) $3^{100} : [3^{40} \cdot 3^{58} - (3^{10} \cdot 3^{15})^5 : 3^{27} + (4^{57} : 4^{56} - 1^{2014})^{97}] \cdot 7$.

28. Calculați sumele:
a) $(3 + 5 + 7 + \ldots + 2015) - 2 - 4 - 6 - \ldots - 2014$;
b) $(2 + 4 + 6 + \ldots + 2016) - 1 - 3 - 5 - \ldots - 2015$.

29. Verificați dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte sau cuburi perfecte:
a) $27 \cdot 14 + 27 \cdot 13$; b) $5^{29} - 5^{28} - 5^{28}$; c) $3^{31} - 3^{30}$.

30. Demonstrați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:
a) $19^{18} + 46^{17}$; b) $34^{19} + 29^{17}$; c) $54^{11} - 39^{10}$.

31. Calculați $3a + 5b + 2c$, știind că $a + b = 5$ și $b + c = 7$.

32. Calculați $a - c$, știind că $a + b = 21$ și $b + c = 7$.

33. Determinați numerele naturale nenule a, b și c, știind că:
$$a \cdot b = 35, b \cdot c = 63 \text{ și } a \cdot c = 45.$$

34. a) Calculați cu câte zerouri se termină fiecare număr:
$$a = 2^7 \cdot 25^2 \cdot 7^4 \text{ și } b = 2^6 \cdot 5^{10} \cdot 3^7.$$
b) Calculați cu câte zerouri se termină produsul $a \cdot b$.
c) Calculați care este ultima cifră nenulă a produsului $a \cdot b$.

35. Folosind proprietățile operațiilor învățate, calculați:
a) $(3^6 - 3^5) \cdot (3^5 - 3^4) \cdot (3^4 - 3^3) : (3^4)^3$; b) $(1111 + 2222 + \ldots + 9999) : 1111 + 55$.

36. Scrieți în ordine crescătoare numerele 3^{2^3}; 3^{3^2}; 3^{33}; 33^3; $(3^2)^3$.

37. Comparați numerele:
a) $x = 3^{542} - 3^{541} - 3^{540}$ cu $y = 5^{361}$;
b) $x = 2^{2016} - 2^{2015} - 2^{2011}$ cu $y = 3^{2014} - 3^{2013} - 3^{2012}$.

38. Determinați numărul natural x pentru care:
a) $[(5 \cdot 2 \cdot 7)^2 + x] - 401 = 5 \cdot 10^3$; b) $128 - [48 + 6 \cdot 7 - (x : 3 + 15)] : 3 = 104$.

PE-PP Supermate ****

39. a) Calculați $1^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$.
b) Arătați că numărul 2011^{2011} poate fi scris ca o sumă de cinci pătrate perfecte.

Emil Vlad, Zimnicea, Teleorman

40. Arătați că numărul $10^{20} + 3 \cdot 10^{10} - 1$ nu este pătrat perfect.

Ion Fota, Izbiceni, Olt

41. Găsiți toate numerele naturale de forma $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $\overline{xyz} - \overline{xy} - z$ este cub perfect.

Camelia și Nicolae Dobrinescu, Morărești, Argeș

Rezolvare: Cum $A = \overline{xyz} - \overline{xy} - z = 90x + 9y = 9 \cdot \overline{xy} = 3^2 \cdot \overline{xy}$, rezultă că z poate fi orice cifră. Dacă A este cub perfect, atunci $\overline{xy} = 3 \cdot a^3$. Deoarece A este un număr de trei cifre, se obține $3^3 \cdot a^3 < 999$, din care rezultă că $a^3 < 37$. Dar $3^3 \cdot a^3 > 9$, adică $a \geq 2$. Cum $a \geq 2$, rezultă că $a = 2$ sau $a = 3$. Pentru $a = 2$ se obțin numerele $\overline{24z} \in \{240, 241, \ldots, 249\}$. Pentru $a = 3$ se obțin numerele $\overline{81z} \in \{810, 811, 812, \ldots, 819\}$.

42. a) Arătați că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.
b) Câte cifre are numărul $a = 2^{320} \cdot 5^{240}$.

Neculai Stanciu, Buzău, și Titu Zvonaru, Comănești

43. Determinați restul împărțirii numărului $n = 98^{98} - 26^{98}$ la 9.

Dorin Linț și Maranda Linț, Deva

PE-PP Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare

1. Fie numerele naturale x, y, z, u care verifică egalitatea: $7x + 5y - 2z - 2u = 0$. Determinați ultima cifră a numărului $A = (11x + 9y) \cdot (z + u - x)$.

Alfred Eckstein și Viorel Tudoran, Arad

2. Aflați numerele $\overline{ab}$, știind că $a^4 + a^2 = 5 \cdot b$.

Vasile Predan, Curtea de Argeș

3. Determinați numerele naturale a și b, știind că $2^{3a} - 2^{3b} = \overline{xyz}$ și $\overline{xyz}$ este număr impar.

Pavel Rîncu, Bozovici

4. Aflați ultimele două cifre ale numărului: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{2013} + 7^{2014}$.

5. Un număr natural n dă restul 4 la împărțirea prin 7 și restul 5 la împărțirea prin 9. Aflați restul împărțirii numărului n prin 63.

Rodica Mărăcineanu, Giurgiu

6. Determinați numărul natural care satisface simultan condițiile:
a) împărțit la 4, dă restul 3;
b) împărțit la 10, dă restul 1;
c) împărțit la 12, dă restul 3;
d) suma câturilor celor trei împărțiri de la punctele a), b), c) este mai mare cu 16 decât o treime din numărul dat.

7. Determinați numerele de două cifre din care, dacă se scad răsturnatele lor, se obțin cuburi perfecte.

8. Determinați cel mai mic număr natural de trei cifre, știind că împărțindu-l pe rând la trei numere naturale consecutive, obținem câturi tot numere naturale consecutive, iar suma celor trei resturi 23.

Nicolae Stănică

9. Se dau numerele: $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2002^2$ și $B = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + 2001 \cdot 2003$. Calculați $A - B$.

Revista Sinus nr. 2-3/2010

10. a) Arătați că $2590 = 45^2 + 23^2 + 6^2$.
b) Arătați că pentru orice număr natural impar n, numărul $x = 5^n \cdot 7^{n+2} + 7^n \cdot 5^{n+2}$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate perfecte.

„Tinere Speranțe", Baia Mare, 2011

PE Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Dintre numerele 2^{30} și 3^{20}, mai mare este ……

(0,5p) **2.** Rezultatul calculului $(2^3)^4 : 2^{10}$ este ……

(0,5p) **3.** Dacă $3^x = 81$, atunci x este egal cu ……

(0,5p) **4.** Produsul a două numere naturale diferite este 49. Suma acestor numere este ……

(0,5p) **5.** Numărul natural x pentru care $134 - x = 97$ este ……

(0,5p) **6.** Rezultatul calculului $2014 \cdot 2013 + 2014 \cdot 2015 - 2014^2$ este ……

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Diferența dintre cel mai mare număr natural de patru cifre distincte și cel mai mic număr natural de trei cifre distincte este egală cu:

A. 9774 B. 9747 C. 7974 D. 9474

(0,5p) **2.** Suma a două numere naturale este 11. Cea mai mare valoare a produsului celor două numere este egală cu:

A. 30 B. 28 C. 36 D. 32

(0,5p) **3.** Produsul a două numere naturale este 12. Cea mai mică valoare a sumei celor două numere este egală cu:

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

(0,5p) **4.** Rezultatul calculului $6^{n+2} : 3^{n+2} : 2^n$ este egal cu:

A. 1 B. 8 C. 2 D. 4

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** a) Calculați ultima cifră a numărului 2^{2014}.

b) Scrieți pătratele perfecte mai mici decât 40.

(1p) **2.** Aflați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât:

a) $4x - 2 \leq 18$; b) $55 - 2(x + 5) = 31$.

(1p) **3.** Diferența a două numere este 86. Dacă se împarte numărul mare la cel mic, se obține câtul 4 și restul 17. Calculați suma celor două numere.

(1p) **4.** a) Aflați cel mai mic număr natural n pentru care numărul $A = 2^3 \cdot 3^5 \cdot n$ este pătrat perfect.

b) Aflați cel mai mic număr natural n pentru care numărul $B = 3^4 \cdot 25^2 \cdot n$ este cub perfect.

PE-PP 2. Divizor, multiplu

Definiție: Fie a și b două numere naturale. Spunem că b este **divizor** al lui a dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Observație: În această situație, despre a se spune că este un **multiplu** al lui b și se utilizează una dintre următoarele scrieri:

$b \mid a$ (se citește „b divide a"); $a \vdots b$ (se citește „a este divizibil cu b").

Exemple:

1. $2 \mid 48$, deoarece există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $48 = 2 \cdot c$ (numărul natural c este 24). Deci, 2 este divizor al lui 48; 48 este multiplu al lui 2.
2. Fie n un număr natural oarecare; $n \mid 0$, deoarece există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $0 = n \cdot c$ (numărul natural c este 0).
3. $0 \mid 0$, deoarece există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $0 = 0 \cdot c$ (numărul natural c poate fi orice număr natural).

Observație: În matematică, pentru oricare dintre următoarele exprimări **„dacă și numai dacă"**; **„este echivalent cu"**; **„este tot una cu"**; **„înseamnă că"** se folosește simbolul $\Leftrightarrow$. De exemplu, dacă a, b și c sunt numere naturale și $b \neq 0$, atunci:

$$a = b \cdot c \Leftrightarrow a : b = c.$$

Folosind acest fapt, definiția divizibilității este mai simplu de scris și mai ușor de reținut:

Definiție: Dacă a și b sunt două numere naturale și $b \neq 0$, atunci:

$$b \mid a \Leftrightarrow a : b = c \text{ și } c \in \mathbb{N}.$$

Observații: 1. Se mai folosesc simbolurile: $\nmid$ (nu divide); $\not\vdots$ (nu este divizibil cu).

2. Dacă a este un număr natural mai mare sau egal cu 2 ($a \geq 2$), atunci numerele 1 și a se numesc **divizori improprii** ai numărului a, iar ceilalți divizori ai numărului a se numesc **divizori proprii**.

Exemple: 1. $3 \mid 27$, deoarece $27 : 3 = 9$ și $9 \in \mathbb{N}$; **2.** $6 \nmid 27$, deoarece $27 : 6 \notin \mathbb{N}$.

Fie a un număr natural. Se notează cu D_a mulțimea tuturor divizorilor lui a, iar M_a mulțimea tuturor multiplilor lui a. Atunci:

$$D_a = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \mid a\}; \qquad M_a = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } a \mid x\}.$$

Exemple:

1. Aflați elementele mulțimii D_{24}.

Rezolvare: $D_{24} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \mid 24\}$. Deoarece $x \mid 24 \Leftrightarrow 24 : x \in \mathbb{N}$, rezultă că x este: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Deci, $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

2. Aflați elementele mulțimii M_3.

Rezolvare: $M_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 3 \mid x\}$. Deoarece $3 \mid x \Leftrightarrow x : 3 = k$ și $k \in \mathbb{N}$, de unde $x = 3k$, rezultă: $M_3 = \{x \mid x = 3 \cdot k \text{ și } k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow M_3 = \{3 \cdot 0; 3 \cdot 1; 3 \cdot 2; 3 \cdot 3; 3 \cdot 4; 3 \cdot 5; \ldots\}$. Deci, $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}$.

Observație: $D_0 = \mathbb{N}$ și $M_0 = \{0\}$; $D_1 = \{1\}$ și $M_1 = \mathbb{N}$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $60 = 15 \cdot x$; p_2: există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $60 = 24 \cdot x$;

p_3: există $x \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $60 = 24 \cdot x$; p_4: există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $7 = 2{,}4 \cdot x$.

2. Alegeți dintre cuvintele: *divide, divizibil, multiplu, divizor* pe cele potrivite și completează textele a), b) și c) de mai jos astfel încât propozițiile rezultate să fie adevărate.

a) „Deoarece există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $60 = 15 \cdot x$, se spune că 15 … pe 60. Despre 15 se spune că este un … al lui 60, iar despre 60 se spune că este un … al lui 15".

b) „Deoarece există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $60 = 4 \cdot x$, se spune că 60 este … cu 4. Despre 60 se spune că este un … al lui 4, iar despre 4 se spune că este un … al lui 24".

c) „Deoarece nu există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $60 = 24 \cdot x$, rezultă că 24 nu … pe 60. Deci, 24 nu este … al lui 60, iar 60 nu este un … al lui 24".

3. Știind că propozițiile p_1, p_2 și p_3 sunt adevărate, completați propozițiile corespunzătoare, respectiv q_1, q_2 și q_3, cu simboluri adecvate ($\vdots$, $\mid$, $\not\vdots$, $\nmid$) astfel încât propozițiile obținute să fie adevărate.

p_1: „$\exists\, x \in \mathbb{N}$ a.î. $82 = 8 \cdot x$" $\Rightarrow q_1$: „8 … 82";

p_2: „$\exists\, x \in \mathbb{N}$ a.î. $72 = 9 \cdot x$" $\Rightarrow q_2$: „72 … 9";

p_3: „$\nexists\, x \in \mathbb{N}$ a.î. $82 = 5 \cdot x$" $\Rightarrow q_3$: „5 … 82 și 82 … 5".

Simboluri și abrevieri folosite: $\exists$ (există); $\nexists$ (nu există); a.î. (astfel încât); $\Rightarrow$ (rezultă).

4. Se știe că $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ și $b \mid a$. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$; p_2: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$; p_3: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$; p_4: $\frac{a}{b} \notin \mathbb{N}$.

5. Scrieți divizorii numărului: a) 7^2; b) 5^3.

6. Scrieți multiplii numărului 3^2 mai mici decât 72.

7. Determinați mulțimea:

a) D_{48}; b) M_5; c) D_{60}; d) M_{12}; e) D_{72}; f) M_{18}.

8. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: „3 divide 9"; p_5: „$D_1 = \{1\}$";

p_2: „$D_7 = \{1; 7\}$"; p_6: „$D_0 = \mathbb{N}$";

p_3: „20 nu se divide la 5"; p_7: „$M_1 = \mathbb{N}$";

p_4: „$\{1, 3, 6, 9\} \subset M_3$"; p_8: „$M_0 = \{0\}$".

9. a) Scrieți toate perechile de divizori ai numărului 18, al căror produs este 18.

b) Scrieți trei numere naturale care au exact trei divizori.

10. Scrieți divizorii proprii și divizorii improprii ai numerelor:

a) 17; b) 32; c) 49; d) $1^3 \cdot 3^2$.

PE Aplicare și exersare **

11. a) Scrieți elementele mulțimii D_{96}.

b) Scrieți elementele mulțimii D_{72}.

c) Aflați cel mai mare număr natural x, știind că $x \mid 96$ și $x \mid 72$.

12. Determinați elementele mulțimii:

a) D_{14}; b) D_{18}; c) D_{24}; d) $D_{14} \cap D_{18}$;

e) $D_{14} \cap D_{24}$; f) $D_{18} \cap D_{24}$; g) $D_{14} \cap D_{18} \cap D_{24}$.

13. Fie mulțimea D_{12} și $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 30$ și $x \vdots 6\}$. Calculați:

a) $M \cap D_{12}$; b) $M \cup D_{12}$; c) $M - D_{12}$; d) $D_{12} - M$.

14. Enumerați elementele mulțimilor: $A = \{x \mid x \in M_6$ și $x \leq 30\}$, $B = \{y \mid y \in M_{12}$ și $y \leq 25\}$ și apoi calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

15. Se consideră mulțimile: $A = \{x \mid x \in M_6, x \leq 30\}$ și $B = \{y \mid y \in M_4, y < 29\}$.

a) Scrieți elementele mulțimilor A și B.

b) Scrieți elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

16. Fie mulțimile: $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \vdots 12$ și $x \leq 48\}$; $N = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \vdots 6$ și $x \leq 48\}$;

$P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \vdots 3$ și $x \leq 48\}$ și $Q = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \vdots 4$ și $x \leq 48\}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $N \subset M$; b) $P \subset M$; c) $Q \subset M$; d) $P \subset N$;

e) $P \cap Q = M$; f) $M \cap N = M$; g) $P \cup N = P$; h) $P \cap N = N$.

17. Prin împărțirea unui număr natural la 12 se obține restul 8. Arătați că numărul se divide cu 4.

18. Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât:

a) $x - 1 \in D_{15}$; b) $2x + 1 \in D_{12}$; c) $x + 2 \in D_{21}$.

19. Aflați restul împărțirii unui număr natural x la 7, știind că numărul $x - 6$ este un multiplu al lui 7.

20. Aflați numărul care este un multiplu al lui 6, mai mare decât 269 și mai mic decât 271.

Rezolvare: Fie x numărul căutat; cum x este multiplu al lui $6 \Rightarrow \frac{x}{6} = k$ și $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in 6k$, $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $269 < x < 271$, rezultă $269 < 6k < 271$. Împărțind prin 6 rezultă: $44\frac{5}{6} < k \leq 45\frac{1}{6}$ și $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 45$ și $x = 6 \cdot 45$. Deci, x este 270.

21. Aflați cel mai mare multiplu al lui 7 care este mai mare decât 308 și mai mic decât 324.

PE Aprofundare și performanță ***

22. Aflați $x \in \mathbb{N}$ știind că $x \mid 18$ și $5 \mid (x - 1)$.

Rezolvare: Din $x \mid 18 \Rightarrow \frac{18}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Din $5 \mid (x - 1) \Rightarrow \frac{x-1}{5} = k$ și $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 5k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Pentru $x = 1 \Rightarrow 5k + 1 = 1 \Rightarrow k = 0 \in \mathbb{N}$.

Pentru $x = 2 \Rightarrow 5k + 1 = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$. Pentru $x = 3 \Rightarrow 5k + 1 = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$. Pentru $x =$

$= 6 \Rightarrow 5k + 1 = 6 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{N}$. Pentru $x = 9 \Rightarrow 5k + 1 = 9 \Rightarrow k = \frac{8}{5} \notin \mathbb{N}$ și pentru $x = 18 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5k + 1 = 18 \Rightarrow k = \frac{17}{5} \notin \mathbb{N}$. Se obține $x = 1$ și $x = 6$.

23. Aflați cel mai mare număr natural x știind că $x \mid 24$ și $5 \mid (x - 2)$.

24. Scrieți:

a) multiplii lui 5 mai mici decât 40;

b) multiplii lui 126 cuprinși între 500 și 1000.

25. Calculați multiplii lui 47 cuprinși între 400 și 500.

26. Determinați numerele naturale x și y, știind că $x \cdot y = 24$.

Rezolvare: $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ și $x \cdot y = 24 \Rightarrow x$ este divizor al lui 24 și $y = 24 : x$. Deci $x \in D_{24}$ și $y = 24 : x$. Cum $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, obținem:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 24 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 12 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 24 \\ y = 1 \end{cases}$.

27. Determinați numerele naturale x și y, știind că $(x - 1)(y + 1) = 6$.

28. Se spune că perechea de numere naturale (m, n) este soluție a ecuației $(2x + 5) \cdot (2y + 3) = 21$, dacă numerele naturale m și n verifică ecuația, adică $(2m + 5) \cdot (2n + 3) = 21$.

a) Arătați că perechea $(1, 0)$ este soluție a ecuației, iar perechea $(0, 1)$ nu este soluție a ecuației.

b) Arătați că ecuația are cel mult două soluții în $\mathbb{N}$.

c) Rezolvați ecuația în mulțimea $\mathbb{N}$.

Rezolvare: b) Din $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ și $(2x + 5) \cdot (2y + 3) = 21 \Rightarrow 2x + 5 \in D_{21}$ și $2y + 3 \in D_{21}$. Dar $D_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$. Deci $2x + 5 \in \{1, 3, 7, 21\}$ și $2y + 3 \in \{1, 3, 7, 21\}$. Rezultă $x \in \{1, 8\}$ și $y \in \{0, 2, 9\}$, deci ecuația dată are cel mult două soluții.

c) Din $x = 1 \Rightarrow 2x + 5 = 7 \Rightarrow 2y + 3 = 3 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{N}$. Din $x = 8 \Rightarrow 2x + 5 = 21 \Rightarrow 2y + 3 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y \notin \mathbb{N}$. Deci ecuația are soluția $(1, 0)$.

29. Se consideră ecuația $(2x + 3) \cdot (2y + 7) = 75$.

a) Arătați că în mulțimea $\mathbb{N}$ ecuația are cel mult trei soluții.

b) Rezolvați în mulțimea $\mathbb{N}$ ecuația.

30. a) Arătați că numerele de forma $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 27, unde $n \in \mathbb{N}$.

b) Arătați că numerele de forma $72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$ sunt divizibile cu 63, unde $n \in \mathbb{N}$.

PE-PP Supermate ****

31. Doi multipli ai numărului 5 se numesc **consecutivi**, dacă între ei nu mai există un alt multiplu al numărului 5. De exemplu, 10 și 15 sunt multipli consecutivi ai lui 5. Dar 10 și 20 nu sunt multipli consecutivi ai lui 5 (între 10 și 20 se află 15, care este un multiplu al lui 5).

a) Arătați că dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $5n$ și $5 \cdot (n + 1)$ sunt multipli consecutivi ai lui 5.

b) Suma a doi multipli consecutivi ai lui 7 este 91. Aflați cei doi multipli.

Rezolvare: a) Presupunem că $5n$ şi $5(n + 1)$ nu sunt multipli consecutivi ai lui 5. Deci există x multiplu al lui 5 astfel încât $5n < x < 5(n + 1)$. Cum x este multiplu al lui $5 \Rightarrow \frac{x}{5} = k$ şi $k \in \mathbb{N}$, deci $x = 5k$, $k \in \mathbb{N}$. Rezultă $5n < 5k < 5(n + 1)$. Împărţim la 5 şi obţinem $n < k < n + 1$, ceea ce este absurd, deoarece ar rezulta că între numerele naturale consecutive n şi $n + 1$ s-ar afla numărul natural k; b) $7n + 7(n + 1) = 91$ conduce la $n = 6$. Numerele vor fi 42 şi 49.

32. Aflaţi cei trei multipli consecutivi ai lui 6 pentru care suma lor este 468.

33. Arătaţi că:

a) dacă $x \in \mathbb{N}$, $x \vdots 2$ şi $x \vdots 3$, atunci $x \vdots 6$; b) $M_2 \cap M_3 = M_6$.

Este adevărat că dacă $x \in \mathbb{N}$, $x \vdots 4$ şi $x \vdots 6$, rezultă $x \vdots 24$?

Rezolvare: a) Din $x \vdots 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = m$ şi $m \in \mathbb{N}$, deci $x = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Analog, deoarece $x \vdots 3$, rezultă $x = 3n$, $n \in \mathbb{N}$. Din $2m = 3n$ rezultă $m = \frac{3n}{2} \in \mathbb{N}$, deci $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $x = 6k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x}{6} = k$, $k \in \mathbb{N}$, deci $x \vdots 6$.

b) Arătăm că mulţimile $M_2 \cap M_3$ şi M_6 au aceleaşi elemente. Pentru aceasta arătăm următoarele:
1) $x \in M_2 \cap M_3 \Rightarrow x \in M_6$;
2) $x \in M_6 \Rightarrow x \in M_2 \cap M_3$.
1) Fie $x \in M_2 \cap M_3 \Rightarrow x \in M_2$ şi $x \in M_3 \Rightarrow x \vdots 2$ şi $x \vdots 3$. Conform punctului a) rezultă $x \vdots 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in M_6$. Deci $x \in M_2 \cap M_3 \Rightarrow x \in M_6$;
2) Fie $x \in M_6 \Rightarrow x \vdots 6 \Rightarrow \frac{x}{6} = k$ şi $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 6k$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $x = 2n$, unde $n = 3k \in \mathbb{N}$ şi $x = 3m$, unde $m = 2k \in \mathbb{N}$. Deci $\frac{x}{2} = n \in \mathbb{N}$ şi $\frac{x}{3} = m \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in M_2$ şi $x \in M_3$. Prin urmare $x \in$ $\in M_2 \cap M_3 \Rightarrow x \in M_6$.
c) Nu este adevărat, deoarece, de exemplu, $12 \vdots 4$ şi $12 \vdots 6$, dar $12 \not\vdots 24$.

34. Arătaţi că:

a) dacă $x \in \mathbb{N}$, $x \vdots 3$ şi $x \vdots 5$, atunci $x \vdots 15$; b) $M_3 \cap M_5 = M_{15}$.

35. Arătaţi că:

a) $(46^{48} - 25^{24}) \vdots 41$; b) $(2016^{2013} - 5^{2013}) \vdots 2011$.

Indicaţie: a) Se scrie $46 = 41 + 5$ şi se aplică formula $(a + b)^x = M_a + b^x$, unde $a, b \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{N}^*$.

PE-PP 3. Criterii de divizibilitate

Criteriul de divizibilitate cu *a*. Fie n un număr natural. Ne interesează să stabilim condiţia pe care trebuie să o îndeplinească numărul n pentru a fi divizibil cu un alt număr, de exemplu cu natural a, fără a efectua împărţirea lui n la a. Această condiţie (regulă) se numeşte **criteriul de divizibilitate cu *a***.

Exemplu: Fie abc un număr natural de trei cifre (a, b şi c sunt cifre, $a \neq 0$).

Să arătăm că:

1) dacă $(a + b + c) \vdots 3$, atunci $\overline{abc} \vdots 3$;

2) dacă $\overline{abc} \vdots 3$, atunci $(a + b + c) \vdots 3$.

Să arătăm 1): Într-adevăr, $(a + b + c) \vdots 3 \Rightarrow a + b + c = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $\overline{abc} =$ $= 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = (99a + 9b) + (a + b + c) = 3(33a + 3b) +$ $+ 3k = 3(33a + 3b + k) = 3m$, unde $m = 33a + 3b + k \in \mathbb{N}$. Deci $\overline{abc} = 3m$, $m \in \mathbb{N}$. De aici rezultă $\overline{abc} \vdots 3$.

Să arătăm 2): Într-adevăr, $\overline{abc} \vdots 3 \Rightarrow \overline{abc} = 3m$, $m \in \mathbb{N}$. Dar $\overline{abc} = (99a + 9b) +$ $+ (a + b + c)$. Rezultă $3m = (99a + 9b) + (a + b + c)$. Observând că $99a + 9b = 3n$, unde $n = 33a + 3b \in \mathbb{N}$, din ultima egalitate rezultă $a + b + c = 3(m - n)$ şi $m - n = p \in \mathbb{N}$, deci rezultă $(a + b + c) \vdots 3$.

Afirmaţiile 1) şi 2) pot fi formulate împreună astfel: $\overline{abc} \vdots 3 \Leftrightarrow (a + b + c) \vdots 3$, adică: *Un număr de trei cifre este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor numărului este divizibilă cu 3.*

Argumentele prezentate mai sus constituie ceea ce în mod uzual se numeşte „demonstraţia" acestei propoziţii. Reformulaţi şi demonstraţi propoziţia $\overline{ab} \vdots 3 \Leftrightarrow (a + b) \vdots 3$.

Criteriul de divizibilitate cu 10. Un număr natural este divizibil cu 10 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este zero.

$$\overline{a_1a_2...a_n} \vdots 10 \Leftrightarrow a_n = 0.$$

Criteriul de divizibilitate cu 10^n, $n \in \mathbb{N}^*$. Un număr natural este divizibil cu 10^n, $n \in \mathbb{N}^*$, dacă şi numai dacă ultimele n cifre ale sale sunt egale cu zero.

Altfel spus, un număr natural este divizibil cu 10 (100, 1000, ...) dacă şi numai dacă ultima (ultimele două, trei, ...) cifră a numărului este egală cu zero.

Criteriul de divizibilitate cu 2. Un număr natural este divizibil cu 2 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este pară.

$$\overline{a_1a_2...a_n} \vdots 2 \Leftrightarrow a_n = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Criteriul de divizibilitate cu 5. Un număr natural este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.

$$\overline{a_1a_2...a_n} \vdots 5 \Leftrightarrow a_n = \{0, 5\}.$$

Observaţii:

1. Un număr natural este divizibil cu 2, respectiv 5, dacă şi numai dacă ultima sa cifră este divizibilă cu 2, respectiv 5.

2. Un număr natural este divizibil cu 2^2, respectiv 5^2, dacă şi numai dacă numărul format din ultimele două cifre ale sale este divizibil cu 2^2, respectiv 5^2.

Criteriul de divizibilitate cu 3. Un număr natural este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor numărului este divizibilă cu 3.

$$\overline{a_1a_2...a_n} \vdots 3 \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n) \vdots 3.$$

Criteriul de divizibilitate cu 9. Un număr natural este divizibil cu 9 dacă şi numai dacă suma cifrelor numărului este divizibilă cu 9.

$$\overline{a_1a_2...a_n} \vdots 9 \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n) \vdots 9.$$

Observaţii:

1. Un număr natural este divizibil cu 3, respectiv cu 9, dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3, respectiv cu 9.

2. Dacă n este un număr natural, atunci:

- restul împărţirii lui n la 10 este egal cu ultima cifră a lui n şi restul împărţirii lui n la 100, 1000, … este format din ultimele două, trei, … cifre ale lui n;
- restul împărţirii lui n la 2, respectiv la 5, este egal cu restul împărţirii ultimei cifre a lui n la 2, respectiv la 5, şi restul împărţirii lui n la 2^2, respectiv la 5^2, este egal cu restul împărţirii numărului format de ultimele două cifre ale lui n la 2^2, respectiv la 5^2;
- restul împărţirii lui n la 3, respectiv la 9, este egal cu restul împărţirii sumei cifrelor numărului n la 3, respectiv la 9.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Scrieţi câte trei numere naturale divizibile cu:
a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 9; f) 10.

2. Scrieţi cel mai mare număr natural de trei cifre divizibil cu:
a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 9; f) 10.

3. Scrieţi cel mai mic număr natural de trei cifre divizibil cu:
a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 9; f) 10.

4. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
$370 \vdots 5$; $5 \mid 326$; $7123 \vdots 2$; $2 \mid 3245$; $3021 \vdots 3$; $3 \mid 555$; $7364 \vdots 4$; $4 \mid 3040$; $321\,651 \vdots 9$; $9 \mid 43\,434$; $217 \vdots 10$; $10 \mid 620$.

5. Scrieţi numerele naturale cuprinse între 327 şi 375 divizibile cu:
a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 9; f) 10.

6. Scrieţi toate numerele naturale $\overline{23x}$ divizibile cu:
a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 9; f) 10.

PE Aplicare şi exersare **

7. Determinaţi toate numerele naturale de forma:
a) $\overline{53x}$; b) $\overline{x14x}$; c) $\overline{3xx}$; d) $\overline{xxx}$; e) $\overline{2x5y}$, $x \neq y$, divizibile cu 2.

8. Determinaţi toate numerele naturale de forma:
a) $\overline{53x}$; b) $\overline{x14x}$; c) $\overline{3xx}$; d) $\overline{xxx}$; e) $\overline{2x5y}$, $x \neq y$, divizibile cu 3.

9. Determinaţi toate numerele naturale de forma:
a) $\overline{53x}$; b) $\overline{x14x}$; c) $\overline{3xx}$; d) $\overline{xxx}$; e) $\overline{2x5y}$, $x \neq y$, divizibile cu 4.

10. Determinaţi toate numerele naturale de forma:
a) $\overline{53x}$; b) $\overline{x14x}$; c) $\overline{3xx}$; d) $\overline{xxx}$; e) $\overline{2x5y}$, $x \neq y$, divizibile cu 5.

11. Determinaţi toate numerele naturale de forma:
a) $\overline{53x}$; b) $\overline{x14x}$; c) $\overline{3xx}$; d) $\overline{xxx}$; e) $\overline{2x5y}$, $x \neq y$, divizibile cu 9.

12. Determinaţi toate numerele naturale de forma:
a) $\overline{7x0}$; b) $\overline{x70}$; c) $\overline{2x5x}$; d) $\overline{7x2y}$, $x \neq y$, divizibile cu 10.

13. a) Scrieţi numerele naturale, multipli ai lui 2, care sunt soluţii ale inecuaţiei $5x < 25$.
b) Scrieţi numerele naturale, multipli ai lui 5, care sunt soluţii ale inecuaţiei $3x < 50$.
c) Scrieţi numerele naturale, multipli ai lui 3, care sunt soluţii ale inecuaţiei $2x < 26$.

14. Fie mulţimea $A = \{12, 25, 372, 4\,509, 108\,324, 10\,620\}$. Scrieţi submulţimile mulţimii A formate din:
a) numere divizibile cu 2; b) numere divizibile cu 3;
c) numere divizibile cu 4; d) numere divizibile cu 5;
e) numere divizibile cu 9; f) numere divizibile cu 10.

15. Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{1x2x3x}$ divizibile cu:
a) 2; b) 5; c) 3; d) 4; e) 9; f) 10.

16. Fie mulţimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \vdots 10, x < 100\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \vdots 10, x \leq 50\}$. Determinaţi $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ şi $B - A$.

17. Fie $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 30\}$. Determinaţi:
$A = \{x \mid x \in M \text{ şi } 12 \vdots x\}$; $B = \{x \mid x \in M \text{ şi } x \vdots 5\}$;
$C = \{x \mid x \in M \text{ şi } x \vdots 3 \text{ şi } x \not\vdots 9\}$; $D = \{x \mid x \in M \text{ şi } x \vdots 2 \text{ şi } x \not\vdots 4\}$;
$E = \{x \mid x \in M \text{ şi } x \vdots 4 \text{ şi } x \vdots 9\}$; $F = \{x \mid x \in M \text{ şi } x \vdots 2 \text{ şi } x \vdots 3\}$.

18. Daţi câte trei exemple de numere de trei cifre care se divid simultan cu:
a) 2 şi 3; b) 3 şi 5; c) 4 şi 9; d) 2, 3 şi 5.

19. Câte numere de forma $\overline{3ab}$ se divid simultan cu:
a) 2 şi 9; b) 2, 3 şi 5; c) 3, 4 şi 5.

20. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi propoziţii adevărate:
a) Dacă un număr se divide cu 4, atunci numărul format din ultimele două cifre ale numărului sunt …… .
b) Dacă un număr se divide cu 25, atunci numărul format din ultimele două cifre ale numărului sunt …… .
c) Dacă un număr se divide cu 10, atunci el se divide şi cu …… .

PE Aprofundare şi performanţă ***

21. Arătaţi că:
a) $10^n + 107$ este divizibil cu 9 pentru orice număr natural n;
b) $2 \cdot 10^n + 70$ este divizibil cu 9 pentru orice număr natural n;
c) $10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 6$ este divizibil cu 9 pentru orice număr natural n.

22. a) Există numerele naturale n de două cifre pentru care $a = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ este divizibil cu 10?
b) Determinaţi numerele naturale n de două cifre pentru care $b = 3^n + 4^n + 5^n + 8^n$ este divizibil cu 10.

23. Determinaţi cifra n, ştiind că fracţia $\dfrac{\overline{31n}}{\overline{5n4}}$ se simplifică cu 4.

24. Arătaţi că $a = 6^n \cdot 5^n + 2^{n+1} \cdot 7 \cdot 15^n + 2^{n+1} \cdot 15^n$ este divizibil cu 17.

25. Arătaţi că $a = 2^n \cdot 3^{n+1} + 4 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n + 7 \cdot 6^n$ este divizibil cu 18.

26. Demonstrați că:

a) $3^{80} - 2^{20}$ se divide cu 5; b) $9^{4n} - 7^{4n}$ se divide cu 10, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

27. Demonstrați că produsul a două numere naturale consecutive este divizibil cu 2.

PE-PP **Supermate** ****

28. Considerăm un număr oarecare de 4 cifre $\overline{abcd}$. Demonstrați că:

a) $\overline{abcd} \vdots 4 \Rightarrow \overline{cd} \vdots 4$; b) $\overline{cd} \vdots 4 \Rightarrow \overline{abcd} \vdots 4$.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d\\ 1000a + 100b = 4(250a + 25b)\\ 10c + d = \overline{cd}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{abcd} = 4k + \overline{cd}, \text{ unde } k = 250a + 25b \text{ și } k \in \mathbb{N}.$$

Dar $\overline{abcd} = 4k + \overline{cd} \Leftrightarrow \overline{cd} = \overline{abcd} - 4k$ ($\overline{abcd} \geq 4k$).

Demonstrăm a): $\overline{abcd} \vdots 4 \Rightarrow \overline{abcd} = 4m$, $m \in \mathbb{N}$. Prin urmare $\overline{cd} = 4m - 4k \Rightarrow \overline{cd} = 4(m - k) \Rightarrow \overline{cd} = 4n$ și $n \in \mathbb{N}$, deci $\overline{cd} \vdots 4$.

Demonstrăm b): $\overline{cd} \vdots 4 \Rightarrow \overline{cd} = 4n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{abcd} = 4k + 4n$. Rezultă $\overline{abcd} = 4(k + n) \Rightarrow \overline{abcd} = 4m$, unde $m = k + n \in \mathbb{N}$. Din $\overline{abcd} = 4m$, $m \in \mathbb{N}$ rezultă $\overline{abcd} \vdots 4$.

29. Considerăm un număr oarecare de 4 cifre $\overline{abcd}$. Demonstrați că:

a) $\overline{cd} \vdots 25 \Rightarrow \overline{abcd} \vdots 25$; b) $\overline{abcd} \vdots 25 \Rightarrow \overline{cd} \vdots 25$.

30. Considerăm un număr oarecare de 4 cifre $\overline{abcd}$. Demonstrați că:

$\overline{abcd} \vdots 100 \Leftrightarrow c = 0$ și $d = 0$.

Observație: Exercițiile 28, 29 și 30 conduc la următoarele criterii de divizibilitate:

Criteriul de divizibilitate cu 4. Un număr natural este divizibil cu 4 dacă și numai dacă ultimele două cifre formează un număr divizibil cu 4.

Criteriul de divizibilitate cu 25. Un număr natural este divizibil cu 25 dacă și numai dacă ultimele două cifre formează un număr divizibil cu 25.

Criteriul de divizibilitate cu 100. Un număr natural este divizibil cu 100 dacă și numai dacă ultimele două cifre sunt 0.

31. a) Demonstrați că dacă $a \vdots 3$ și $a \vdots 8$, atunci $a \vdots 24$.

b) Demonstrați că produsul a patru numere naturale consecutive este divizibil cu 24.

Rezolvare:

a) $\left.\begin{array}{l}a \vdots 3\\ a \vdots 8\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = 3k, k \in \mathbb{N}\\ a = 8m, m \in \mathbb{N}\end{array}\right. \Rightarrow 3k = 8m \Rightarrow k = \dfrac{8m}{3}$ și $k \in \mathbb{N}$. Atunci $\dfrac{m}{3} = n$ și $n \in \mathbb{N}$, deci $m = 3n$ și $n \in \mathbb{N}$. Din $a = 8m$ rezultă $a = 24n$ și $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \vdots 24$.

b) Considerăm patru numere naturale consecutive: n, $n + 1$, $n + 2$ și $n + 3$. Să demonstrăm că produsul lor $a = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ este divizibil cu 24. Din teorema împărțirii cu rest, împărțind numărul natural n la 3, obținem câtul k și restul r; $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2\}$ și $n = 3k + r$.

Avem trei cazuri posibile, după cum r este 0, 1 sau 2.

Cazul $n = 3k$. Atunci $a = 3k(3k + 1)(3k + 2) = 3m$, unde $m = k(3k + 1)(3k + 2) \in \mathbb{N}$. Deci $a = 3m$, $m \in \mathbb{N} \Rightarrow a \vdots 3$.

Cazul $n = 3k + 1$. Atunci $a = (3k + 1)(3k + 2)(3k + 3) = 3(k + 1)(3k + 1)(3k + 2) \Rightarrow a \vdots 3$.

Cazul $n = 3k + 2$. Atunci $a = (3k + 2)(3k + 3)(3k + 4) = 3(3k + 2)(3k + 1)(3k + 4) \Rightarrow a \vdots 3$.

Din teorema împărțirii cu rest, împărțind numărul natural n la 4, obținem un cât q și un rest r; $q \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ și $n = 4q + r$. Avem patru cazuri posibile, după cum r este 0, 1, 2 sau 3. În toate cazurile rezultă că $a \vdots 8$. De exemplu, dacă $r = 2$, atunci $n = 4q + 2 \Rightarrow a = (4q + 2)(4q + 3)(4q + 4)(4q + 5) = 2 \cdot 4(2q + 1)(4q + 3)(q + 1)(4q + 5)$. Deci $a = 8l$, $l \in \mathbb{N}$, rezultă $a \vdots 8$.

Deoarece $a \vdots 3$ și $a \vdots 8$, conform punctului precedent, rezultă $a \vdots 24$. Analizați celelalte trei cazuri posibile.

32. Demonstrați că produsul a trei numere naturale consecutive este divizibil cu 6.

PE-PP 4. Proprietăți ale relației de divizibilitate

Relația de divizibilitate, definită pe mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, are următoarele proprietăți:

Proprietatea 1. Numărul 0 este divizibil cu orice număr natural:

$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \vdots a.$$

Proprietatea 2. Orice număr natural este divizibil cu 1:

$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \vdots 1.$$

Proprietatea 3. Relația de divizibilitate este **reflexivă**. Aceasta înseamnă că orice număr natural este divizibil cu el însuși:

$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \vdots a.$$

Proprietatea 4. Relația de divizibilitate este **antisimetrică**:

$$a, b \in \mathbb{N}, a \vdots b \text{ și } b \vdots a \Rightarrow a = b.$$

Proprietatea 5. Relația de divizibilitate este **tranzitivă**:

$$a, b, c \in \mathbb{N}, a \vdots b \text{ și } b \vdots c \Rightarrow a \vdots c.$$

Proprietatea 6. Relația de divizibilitate rămâne valabilă și în cazul înmulțirii:

$$a, b, m \in \mathbb{N}, a \vdots b \Rightarrow am \vdots bm.$$

Proprietatea 7. Dacă unul dintre factorii unui produs este divizibil cu un număr natural, atunci produsul este divizibil cu acel număr natural:

$$a, b, c \in \mathbb{N}, a \vdots c \Rightarrow (a \cdot b) \vdots c.$$

Proprietatea 8. Dacă fiecare termen al unei sume (diferențe) este divizibil cu un număr natural, atunci suma (diferența) este divizibilă cu acel număr natural:

$$a, b, c \in \mathbb{N}, a \vdots c \text{ și } b \vdots c \Rightarrow (a \pm b) \vdots c.$$

Observații: Demonstrarea proprietăților relației de divizibilitate se bazează pe definiția acesteia:

$$a \vdots b \Leftrightarrow a = b \cdot c, c \in \mathbb{N}.$$

1. Fie $a \in \mathbb{N}$. Deoarece $0 = a \cdot 0$, rezultă $0 \vdots a$. Deci, $a \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \vdots a$. Rezultă $D_0 = \mathbb{N}$.

2. Deoarece $a = 1 \cdot a$, $a \in \mathbb{N}$, rezultă $a \vdots 1$. Deci, $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \vdots 1$. Rezultă $M_1 = \mathbb{N}$.

3. Deoarece $a = a \cdot 1$, rezultă $a \vdots a$. Deci, $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \vdots a$.

4. Proprietățile 2 și 3 clasifică divizorii unui număr natural a în **divizori proprii** și **divizori improprii**. Astfel, 1 și a sunt divizori improprii ai lui a.

Exemplu: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; 1 și 12 sunt **divizori improprii**, iar 2, 3, 4 și 6 sunt **divizori proprii.**

5. $\left.\begin{array}{l} a \vdots b \Rightarrow a = b \cdot c, c \in \mathbb{N} \\ b \vdots a \Rightarrow b = a \cdot d, d \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow a = a(c \cdot d)$. Din ultima egalitate rezultă $c \cdot d = 1$, deci $c = 1$ și $d = 1$. Atunci $a = b$.

6. $\left.\begin{array}{l} a \vdots b \Rightarrow a = b \cdot m, m \in \mathbb{N} \\ b \vdots c \Rightarrow b = c \cdot n, n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow a = c \cdot (m \cdot n)$. Deoarece $a = c \cdot p$, unde $p = m \cdot n \in \mathbb{N}$, rezultă $a \vdots c$.

7. $a \vdots b \Rightarrow a = b \cdot c, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot m = (b \cdot m) \cdot c, c \in \mathbb{N}$. Din ultima egalitate rezultă $a \cdot m \vdots b \cdot m$.

8. $a \vdots c \Rightarrow a = c \cdot m, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b = c \cdot (m \cdot b)$. Deoarece $a \cdot b = c \cdot n$, unde $n = m \cdot b$, rezultă $(a \cdot b) \vdots c$.

9. $\left.\begin{array}{l} a \vdots c \Rightarrow a = c \cdot m, m \in \mathbb{N} \\ b \vdots c \Rightarrow b = c \cdot n, n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow a \pm b = c \cdot (m \pm n)$. Deoarece $a \pm b = c \cdot q$, unde $q = m \pm n \in \mathbb{N}$, rezultă $(a \pm b) \vdots c$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. a) Rescrieți proprietățile relației de divizibilitate folosind în locul cuvântului „divizibil" cuvântul „divide" și în locul simbolului $\vdots$ simbolul $|$.

b) Dați câte trei exemple pentru fiecare proprietate.

2. Fără a calcula S, stabiliți dacă aceasta este divizibilă cu n în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $S = 7152 + 324$ și $n = 2$; b) $S = 1275 - 95$ și $n = 5$;
c) $S = 2721 - 315$ și $n = 3$; d) $S = 2187 - 369$ și $n = 9$;
e) $S = 25024 + 3752$ și $n = 4$; f) $S = 3140 - 240 - 70$ și $n = 10$.

3. Fără a calcula produsul P, stabiliți dacă acesta este divizibil cu n în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $P = 247 \cdot 82$ și $n = 2$; b) $P = 1424 \cdot 25$ și $n = 5$;
c) $P = 1008 \cdot 46$ și $n = 3$; d) $P = 2187 \cdot 17$ și $n = 9$;
e) $P = 1424 \cdot 25$ și $n = 4$; f) $P = 3140 \cdot 54$ și $n = 10$.

4. Stabiliți dacă următoarele enunțuri sunt adevărate și justificați de fiecare dată răspunsul.

a) Dacă un număr este divizibil cu 6, atunci numărul este divizibil și cu 2.
b) Dacă un număr este divizibil cu 2, atunci numărul este divizibil și cu 6.
c) Orice divizor al numărului 14 este și un divizor al numărului 70.
d) Orice divizor al numărului 14 este și un divizor al numărului 35.
e) Dacă un număr este divizibil cu 5 și alt număr este divizibil cu 3, atunci produsul lor este divizibil cu 15.
f) Dacă un număr este divizibil cu 5 și alt număr este divizibil cu 3, atunci suma lor este divizibilă cu 8.
g) Dacă un număr este divizibil cu 6 și alt număr este divizibil cu 15, atunci suma lor este divizibilă cu 3.

5. Determinați $x \in \mathbb{N}$, $x < 10$, astfel încât $5 \mid (15 + x)$.

6. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) dacă $15 \mid a$, atunci $3 \mid a$, unde $a \in \mathbb{N}$;
b) dacă $17 \mid a$ și $a \mid x$, atunci $17 \mid x$, unde $a \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{N}$;
c) dacă $2 \mid a$ și $4 \mid a$, atunci $8 \mid a$, unde $a \in \mathbb{N}$.

7. Șase numere sunt divizibile cu 15, iar al șaptelea număr nu este divizibil cu 15. Care dintre afirmațiile ce urmează este adevărată?

a) Produsul celor șapte numere este divizibil cu 15.
b) Suma celor șapte numere este divizibilă cu 15.

8. Patru dintre termenii unei sume sunt divizibili cu 10, iar al cincilea este multiplu de 15. Stabiliți care dintre propozițiile următoare sunt adevărate:

a) Suma celor cinci numere este divizibilă cu 5.
b) Produsul numerelor este divizibil cu 10^5.
c) Suma numerelor este divizibilă cu 10.

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $11 \mid (2^{103} + 2^{102} - 2^{101})$; b) $7 \mid (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 27)$.

10. Folosind **definiția relației de divizibilitate** și știind că un număr n este divizibil cu 18, arătați că:

a) $n \vdots 9$; b) $n \vdots 6$; c) $n \vdots 3$; d) $n \vdots 2$.

PE Aplicare și exersare **

11. Aplicând proprietatea de **simetrie a relației de divizibilitate**:

a) determinați numărul natural n, știind că $n \vdots 6$ și 6 este un multiplu al lui n;
b) calculați $a - b$, știind că a și b sunt numere naturale astfel încât $a \vdots b$ și $b \vdots a$.

12. a) Arătați că dacă $28 \vdots a$, atunci $56 \vdots 2a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$.

b) Arătați că dacă $a \vdots 7$, atunci $(3 \cdot a) \vdots 7$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$.

13. Calculați valorile numărului n care verifică relația:

a) $D_n \subseteq D_6$; b) $D_n \subset D_{15}$; c) $D_n \subseteq D_{18}$.

14. Scrieți valorile numărului n care verifică relația:

a) $M_6 \subseteq M_n$; b) $M_7 \subseteq M_n$; c) $M_{21} \subset M_n$.

15. Scrieți o sumă formată din trei termeni astfel încât:

a) suma să nu fie divizibilă cu 4, dar doi dintre termenii sumei să fie multipli ai numărului 4;
b) suma să fie divizibilă cu 7, unul din termeni să fie divizibil cu 7, iar ceilalți doi termeni să nu fie divizibili cu 7.

16. Arătați că următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $3 \mid (3a + 6b + 9c)$; b) $4 \mid 16 \cdot 711$;
c) $10 \mid (9^n + 9^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$; d) $7 \mid (1\,001 + 2\,002 + \ldots + 9\,009)$.

17. Aflați $x \in \mathbb{N}$, știind că $4 \mid (2x - 6)$ și $(2x - 6) \mid 4$.

18. Arătați că nu există niciun număr natural a cu proprietatea $245 \vdots a$ și $a \vdots 3$.

19. Un număr natural a este multiplu al lui 18. Arătați că:

a) orice divizor al lui 18 este divizor al lui a;

b) $D_{18} \subset D_a$;

c) mulțimea divizorilor lui a are cel puțin cinci elemente.

20. Arătați că $17 \mid (1 + 2 + 3 + \ldots + 50)$, fără a efectua suma.

PE Aprofundare și performanță ***

21. Arătați că dacă $9 \mid \overline{xyz}$, atunci $9 \mid \overline{51x} + \overline{71y} + \overline{67z}$.

Rezolvare: Din $9 \mid \overline{xyz} \Rightarrow 9 \mid x + y + z$. Deoarece $\overline{51x} + \overline{71y} + \overline{67z} = (510 + x) + (710 + y) + (670 + z) = 1890 + (x + y + z)$. Deoarece $9 \mid 1890$ și $9 \mid (x + y + z)$, rezultă $9 \mid 1890 + (x + y + z)$, deci $9 \mid \overline{51x} + \overline{71y} + \overline{670z}$.

22. Dați un contraexemplu pentru a demonstra că propoziția: „Dacă $3 \mid a$ și $6 \mid a$, atunci $18 \mid a$, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$" este falsă.

23. Determinați valorile lui x astfel încât:

a) $x \mid (x + 6)$; b) $4 \mid (x + 8)$; c) $x \mid (3x + 9)$; d) $(x + 1) \mid (x + 10)$.

24. Arătați că numărul $2^{n+3} - 2^{n+1} - 2^n$ este multiplu de 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

25. Arătați că numărul $11 \cdot 5^n + 4 \cdot 5^{n+1} + 5^{n+2}$ se divide cu 7, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

26. Arătați că $15^{2n+1} - 5^{2n} \cdot 9^{n+1}$ se divide cu 90, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

27. Determinați numărul natural a pentru care:

a) $\dfrac{5}{a} \in \mathbb{N}$; b) $\dfrac{3a+1}{a} \in \mathbb{Z}$; c) $\dfrac{2a+3}{a+2} \in \mathbb{Z}$.

28. Dacă $3 \mid \overline{17x}$, $x \in \mathbb{N}^*$, atunci arătați că $3 \mid \overline{47x}$.

29. Arătați că dacă $9 \mid \overline{xyz}$, atunci $9 \mid \overline{12z} + \overline{47y} + \overline{13x}$.

30. Arătați că:

a) dacă $5 \mid (2a + 3b)$, atunci $5 \mid (7a + 8b)$;

b) dacă $10 \mid (3a + b)$, atunci $10 \mid (7a + 9b)$, unde $a, b \in \mathbb{N}$.

31. Arătați că:

a) dacă $3 \mid (2x + y)$, atunci $3 \mid (5x + 4y)$; b) dacă $9 \mid (x + 3y)$, atunci $9 \mid (8x + 24y)$.

32. Arătați că numărul $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2002} + 3^{2003}$ este divizibil cu:

a) 4; b) 13.

33. Fie numărul $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 26$.

a) Arătați că $A \vdots 10^6$.

b) Determinați cea mai mare valoare a lui $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $3^n \mid A$.

PE-PP Supermate ****

34. Dacă numerele naturale x, y, z verifică relațiile: $37 \mid (5x + 7y + 8z)$ și $37 \mid (x + y + 2z)$, demonstrați că $37 \mid (3x + 5y + 4z)$.

35. Arătați că:

a) printre oricare patru numere naturale există două a căror diferență este un număr divizibil cu 3;

b) printre oricare șapte numere naturale există două a căror diferență este un număr divizibil cu 6.

36. Determinați $n \in \mathbb{N}$, în fiecare din cazurile:

a) $(2n - 1) \mid (4n + 5)$; b) $(3n + 2) \mid (9n + 17)$;

c) $(2n + 1) \mid (3n + 5)$; d) $(n + 3) \mid (n^2 + 6n + 17)$.

37. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x - 1) \mid (2x + 3)\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x + 1) \mid (3x + 5)\}$.

38. Determinați perechile de numere naturale (x, y) care verifică egalitatea:

a) $xy - x = 13$; b) $xy + 2x + 3y = 15$.

PE-PP 5. Numere prime și numere compuse

Orice număr natural, cu excepția lui 1, are cel puțin doi divizori: pe 1 și pe el însuși, numiți **divizori improprii**. Restul divizorilor unui număr se numesc **divizori proprii**.

Exemple: a) 1 și 12 sunt divizori improprii ai lui 12;

b) 2, 3, 4 și 6 sunt **divizori proprii** a lui 12.

Definiție: Un număr natural care are exact doi divizori se numește **număr prim**.

Exemple: Numerele 2, 3, 5, 7, 11 sunt numere prime.

Definiție: Un număr natural care are cel puțin trei divizori se numește **număr compus**.

Exemple: Numerele 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 sunt numere compuse.

Observații:

1. Un număr natural care are numai **divizori improprii** se numește **număr prim**.
2. Numărul 2 are exact doi divizori. Deci este număr prim.
3. Orice număr natural par, $2n$ ($n > 1$) are cel puțin trei divizori (1, n și $2n$), deci este **număr compus**.
4. Reținem că 2 este singurul număr natural **prim** și **par**. Numărul 1 are un singur divizor, deci nu este nici prim și nici compus.

Ciurul lui Eratostene este un criteriu simplu și vechi de recunoaștere a numerelor prime. Acest criteriu a fost creat de Eratostene, un matematician din Grecia antică. El permite găsirea tuturor numerelor prime, mai mici sau egale cu un număr natural dat n, și constă în următoarele:

Etapa 1. Se scriu numerele de la 2 la n într-o listă.

Etapa 2. Primul număr **prim** este 2. Se taie cu o linie oblică toate numerele din listă care sunt multiplii lui 2. Rezultă o nouă listă cu numere tăiate și netăiate.

Etapa 3. Primul număr netăiat din noua listă este **prim**. Se taie din această listă toți multiplii acestui număr prim. Rezultă o nouă listă.

Etapa 4. Se repetă etapa 3 până când noua listă nu mai conține numere netăiate.

Etapa 5. Rezultă o listă finală care conține numere tăiate și netăiate. **Numerele netăiate sunt toate numere prime, mai mici sau egale cu n.**

Din ciurul lui Eratostene rezultă șirul numerelor prime, ordonate crescător:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

Folosind acest șir, stabilim dacă un număr este prim astfel:

- împărțim numărul la numerele prime în ordine crescătoare, până când câtul devine mai mic decât împărțitorul;

• dacă restul tuturor împărțirilor nu este 0, atunci numărul respectiv este prim; dacă restul uneia din împărțiri este 0, atunci numărul este compus.

Exemple:

1. Arătăm că numărul 337 este prim.
   • Împărțim numărul 337 la numerele prime: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
   • Împărțind numărul 337 la 2, apoi la 3 și apoi la 5. De fiecare dată restul împărțirii nu este 0 (nu sunt îndeplinite criteriile de divizibilitate cu aceste numere);
   • apoi împărțim numărul 337 la: 7, 11, 13, ... Rezultă: $337 = 7 \cdot 48 + 1$; $337 = 11 \cdot 30 + 7$; $337 = 13 \cdot 25 + 12$; $337 = 17 \cdot 19 + 14$; $337 = 19 \cdot 17 + 14$. Rezultă că prin împărțirea la 19, câtul 17 este mai mic decât împărțitorul (care este 19) și restul $r = 12 \neq 0$. Rezultă că 337 este număr prim.
2. Arătăm că numărul 289 nu este prim.
   Într-adevăr, $289 \nmid 2$; $289 \nmid 3$; $289 \nmid 5$; $289 = 7 \cdot 41 + 2$; $289 = 13 \cdot 22 + 3$; $289 = 17 \cdot 17 + 0$. Rezultă că 289 este număr compus.

Observație: Pentru a verifica dacă un număr este **prim** sau **compus** se aplică mai întâi criteriile de divizibilitate cunoscute și apoi, dacă mai e cazul, se aplică „Ciurul lui Eratostene".

Exemplu: Stabiliți dacă numerele 57, 127, 132, 161, 917 sunt prime sau compuse.

Rezolvare: Cum $5 + 7 = 12$ și $3 \mid 12 \Rightarrow 3 \mid 57$ și ca urmare 57 nu este număr prim, ci este număr compus: $57 = 3 \cdot 19$. Se verifică pe rând că $127 \nmid 2$, $127 \nmid 3$, $127 \nmid 5$, $127 \nmid 7$, $127 \nmid 11$ și $127 = 13 \cdot 9 + 10$, câtul este mai mic decât împărțitorul și conform ciurului lui Eratostene rezultă că 127 este număr prim. Numărul 132 este par și ca urmare este număr compus. Numărul 161 este multiplu de 7 și este număr compus. Numărul 917 nu se divide cu 2, cu 3 sau cu 5, dar $917 = 7 \cdot 131$ și ca urmare este număr compus. Deci singurul număr prim este 127.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. a) Utilizând ciurul lui Eratostene, găsiți toate numerele prime mai mici decât 100.
b) Încercați să rețineți numerele prime până la 100.

2. Se consideră mulțimea de numere $M = \{101, 102, \ldots, 120\}$. Aflați:
a) $A = \{x \mid x \in M$ și x este număr prim$\}$;
b) $B = \{x \mid x \in M$ și x este număr compus$\}$.

3. Arătați că:
a) numărul 109 este prim; b) numărul 113 este prim; c) numărul 961 este compus.

4. Scrieți mulțimea divizorilor primi ai fiecăruia dintre următoarele numere naturale: 48, 72, 202.

5. Stabiliți dacă numerele următoare sunt prime: 37, 93, 123, 377, 602, 769, 1 243, 1 999.

6. Completați cu numere compuse spațiile punctate:
a) 27 = ... + ...; b) 19 = ... + ...; c) 36 = ... + ...

7. Completați cu numere prime spațiile punctate:
a) 30 = ... + ...; b) 100 = ... + ...; c) 138 = ... + ...;
d) 35 = ... – ......; e) 84 = ... – ......; f) 96 = ... – ......

8. Determinați numerele prime x și y, știind că:
a) $x + y = 39$; b) $x \cdot y = 91$; c) $x - y = 95$.

9. Determinați cifra x astfel încât numerele: x, $\overline{3x}$, $\overline{4x}$ și $\overline{9x}$ să fie prime.

10. Determinați perechile de numere prime a căror sumă este un număr natural de forma $\overline{xx}$.

PE Aplicare și exersare **

11. Pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră numerele: $n + 5$, $n + 9$, $n + 11$, $n + 21$ și $n + 29$.
a) Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care numerele $n + 5$, $n + 9$, $n + 11$, $n + 21$ și $n + 29$ sunt numere compuse.
b) Arătați că există cel puțin două numere naturale n pentru care numerele $n + 5$, $n + 9$, $n + 11$, $n + 21$ și $n + 29$ sunt simultan numere prime.

Rezolvare: Cazul n impar, $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$. Atunci $n + 5 = (2k + 1) + 5 = 2k + 6 = 2 \cdot (k + 3)$, deci numărul este divizibil cu 2 și prin urmare este compus. La fel se arată că, pentru $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$, numerele $n + 9$, $n + 11$, $n + 21$ și $n + 29$ sunt compuse.

Cazul n par, $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$. Pentru $k = 1$, deoarece $n = 2$, rezultă numerele 7, 13, 23 și 31 care sunt simultan prime. Pentru $k = 4$, deoarece $n = 8$, rezultă numerele 13, 17, 19 și 37 care sunt simultan prime.

12. Arătați că suma a două numere prime mai mari decât 2 este un număr compus.

13. Produsul dintre un număr natural prim și un număr impar este 4 866. Aflați numerele.

14. Determinați numărul prim care împărțit la 8 dă câtul 12.

15. Determinați numerele prime a și b, știind că $3a + 16b = 54$.

16. Notăm cu N_1 mulțimea numerelor naturale impare, cu N_2 mulțimea numerelor naturale pare și cu P_r mulțimea numerelor prime.
a) Stabiliți care dintre următoarele intersecții sunt egale cu mulțimea $\varnothing$: $N_1 \cap P_r$; $N_2 \cap P_r$; $N_1 \cap N_2$.
b) Se consideră propozițiile: $x \in N_1$; $x \in N_2$; $x \in P_r$; $x \in N_1 \cap P_r$; $x \in N_2 \cap P_r$; $x \in N_1 \cap N_2$, unde x este unul dintre numerele: 1, 2, 3, 4. Scrieți doar propozițiile adevărate.

17. Scrieți numerele prime de forma $\overline{xy}$ $(x < y)$ cu proprietatea că și $\overline{yx}$ este număr prim.

18. Dacă suma a două numere prime este un număr impar, aflați unul dintre termenii sumei.

19. Dacă suma a două numere prime este un număr prim, aflați unul dintre termenii sumei.

20. Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $2^{2n} \cdot 5^{2n+1} + 1$ nu este prim.

PE Aprofundare și performanță ***

21. Determinați numărul natural n, știind că n și $n + 1$ sunt numere prime.

22. Există un număr prim n astfel încât $n + 7$ să fie număr prim? Justificați.

23. Există un număr prim de forma $\overline{abc}$ astfel încât suma cifrelor sale să fie 6? Justificați.

24. Dacă un număr natural dă la împărțirea cu 6 restul 3, acel număr este prim sau compus? Justificați.

25. Determinați x, astfel încât numerele următoare să fie prime:
a) $\overline{13x}$; b) $\overline{22x}$; c) $\overline{4x3}$; d) $\overline{x33}$.

26. Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Orice număr de forma $\overline{xx}$ este compus.

b) Există numere prime de forma $\overline{xx}$.

c) Orice număr de forma $\overline{10x}$, cu x cifră pară, este prim.

d) Orice număr de forma $\overline{xxx}$ este compus.

27. Aflați numerele prime a, b, c care verifică relația:

a) $3a + 4b + 2c = 48$; b) $a + 2b + 4c = 36$; c) $4a + 6b + 5c = 74$.

Rezolvare: a) $3a = 48 - (4b + 2c) \Rightarrow 3a \,\vdots\, 2 \Rightarrow a \,\vdots\, 2$. Cum a este număr prim, rezultă $a = 2$, iar din egalitatea dată rezultă $2b = 21 - c$, deci $c < 21$. Cum c este număr prim, rezultă $c \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. De aici și din egalitatea $2b = 21 - c$ rezultă $b = 5$ și $c = 11$ sau $c = 2$ și $b = 17$.

PE-PP Supermate ****

28. Demonstrați că un număr prim mai mare decât 3 dă la împărțirea cu 6 restul 1 sau 5.

29. Aflați numărul $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $n(n + 1) + 5n$ să fie prim.

30. Determinați un număr natural n pentru care numerele n, $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + 110$ sunt numere compuse.

31. Dacă $n \in \mathbb{N}$, verificați dacă următoarele numere naturale sunt compuse:

a) $3^n + 7$; b) $7^n + 5$; c) $16 \cdot 10^n + 5$.

32. Arătați că dintre oricare 5 numere naturale prime mai mari decât 2 putem alege două numere, astfel încât diferența lor să fie divizibilă cu 8.

PE-PP 6. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

Definiție: Orice număr natural compus poate fi scris ca un produs de numere naturale prime.

Observații:

1. Scrierea unui număr natural ca un produs de numere naturale prime se numește **descompunerea în factori primi** a numărului natural respectiv și este unică, făcând abstracție de ordinea factorilor.

2. Pentru a ușura descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime se ține cont că $10 = 2 \cdot 5$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ etc.

Exemple:

$$\begin{array}{r|l} 560 & 2 \cdot 5 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24200 & 2^2 \cdot 5^2 \\ 242 & 2 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72\,000 & 2^3 \cdot 5^3 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$ $\qquad 24\,200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2$ $\qquad 72\,000 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

3. Numărul de divizori ai numărului natural n, cu descompunerea în factori primi $n = a^x \cdot b^y$, este $(x + 1)(y + 1)$, $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Scriem divizorii numărului $a^x \cdot b^y$:

$$\left.\begin{array}{l} 1, a, a^2, a^3, ..., a^x;\ \text{sunt } x+1 \text{ divizori} \\ b, ab, a^2b, a^3b, ..., a^xb;\ \text{sunt } x+1 \text{ divizori} \\ b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2, ..., a^xb^2;\ \text{sunt } x+1 \text{ divizori} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b^y, ab^y, a^2b^y, a^3b^y, ..., a^xb^y;\ \text{sunt } x+1 \text{ divizori} \end{array}\right\} y+1 \text{ rânduri scrise}$$

Deci numărul divizorilor este $x + 1$ de $y + 1$ ori, adică $(x + 1) \cdot (y + 1)$.

4. Numărul de divizori ai numărului natural n, cu descompunerea în factori primi $n = a^x \cdot b^y \cdot c^z$, este: $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$, $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Problemă rezolvată

Descompuneți în factori primi și calculați numărul divizorilor naturali pentru fiecare din următoarele numere: 126, 648, 1296.

Rezolvare: Se vor aranja numerele ca în modelele de mai jos și se vor scrie divizorii:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 648 & 2 \\ 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1296 & 2 \\ 648 & 2 \\ 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ și are $(1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$ divizori

$648 = 2^3 \cdot 3^4$ și are $(3 + 1) \cdot (4 + 1) = 20$ divizori

$1296 = 2^4 \cdot 3^4$ și are $(4 + 1) \cdot (4 + 1) = 25$ divizori

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Descompuneți în factori primi numerele A și B și apoi scrieți sub formă de putere produsul $A \cdot B$:

a) $A = 18$ și $B = 1\,260$; b) $A = 1\,750$ și $B = 6\,750$;

c) $A = 3\,240$ și $B = 22\,100$; d) $A = 24\,200$ și $B = 25\,860$.

2. Fie $A = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7$, $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ și $C = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Descompuneți în factori primi:

a) $A \cdot B$; b) $A \cdot C$; c) $B \cdot C$; d) $A \cdot B \cdot C$; e) $A : B$; f) $C : B$.

3. Descompuneți în factori primi și aflați numărul de divizori ai numerelor: 32, 27, 170, 450, 1 350, 252, 350, 1 800.

4. Scrieți mulțimea divizorilor numerelor: 48; 125; 256; 361; 1058.

5. Scrieți 5 exemple de numere naturale diferite care au același număr de divizori.

PE Aplicare şi exersare **

6. Aflaţi două numere consecutive al căror produs este:

a) 1 332; b) 2 352; c) 3 080.

7. Aflaţi trei numere consecutive al căror produs este:

a) 46 620; b) 110 544; c) 166 320.

8. Fără a efectua înmulţirea, aflaţi în câte zerouri se termină numărul $5\,625 \cdot 1\,728$.

9. Care este cel mai mic număr de trei cifre care are exact trei divizori?

10. Determinaţi numerele naturale prime de două cifre, ştiind că produsul cifrelor este 21.

11. Scrieţi numărul natural a cărui descompunere conţine cele mai mici trei numere prime.

12. Scrieţi cele mai mici trei numere naturale care se descompun în produse de câte doi factori primi diferiţi.

13. Determinaţi numerele prime a şi b, ştiind că $a \cdot b = 3\,526$.

14. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{ab}$, ştiind că suma dintre număr şi răsturnatul său este pătrat perfect.

15. Arătaţi că dacă $n \in \mathbb{N}$, descompunerea în factori primi a numărului natural:

$a = 3^{n+2} \cdot 2^{n+3} + 3^{n+1} \cdot 2^{n+4}$ conţine produsul de factori primi $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

16. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, ştiind că produsul numerelor $\overline{ab}$ şi $\overline{cd}$ este 247.

17. Aflaţi numerele naturale x şi y pentru care $x^2(y + 3) = 275$.

18. a) Descompuneţi în factori primi numărul 1 001.

b) Arătaţi că descompunerea în factori primi a numerelor de forma $\overline{abcabc}$ conţine produsul de numere prime $7 \cdot 11 \cdot 13$.

19. Ştiind că $\overline{abc}$ este un număr prim, aflaţi numărul divizorilor numărului $\overline{abcabc}$.

20. Dacă $\overline{ab}$ este număr prim, calculaţi numărul divizorilor numărului natural $\overline{ababab}$.

21. Scrieţi cel mai mic număr natural care are exact 6 divizori.

22. Care este cel mai mare număr de două cifre care are exact patru divizori?

23. Calculaţi în câte zerouri se termină fiecare dintre numerele:

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100; \qquad B = 50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot \ldots \cdot 100.$$

24. Aflaţi numerele naturale x şi y astfel încât $x^2(y + 3) = 864$.

25. Calculaţi suma cifrelor numerelor A, B, $A + B$ şi $A - B$, unde

$$A = 2^{2004} \cdot 5^{2005} + 1 \text{ şi } B = 2^{2002} \cdot 5^{2004} + 1.$$

26. Scrieţi 254 ca o sumă de puteri ale numărului 2.

PE-PP Supermate ****

27. a) Arătaţi că dacă un număr natural n are exact p divizori şi p este număr prim, atunci descompunerea în factori primi a lui a este $n = a^{p-1}$, unde a este număr prim.

b) Aflaţi:

1) cel mai mic număr de trei cifre care are exact trei divizori;

2) cel mai mare număr de trei cifre care are exact trei divizori.

Rezolvare: a) Descompunem n în factori primi: $n = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$. Atunci $p = (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (x_n + 1)$. Cum p este număr prim, rezultă că una dintre paranteze este egală cu p, iar celelalte sunt egale cu 1. De exemplu, $x_1 + 1 = p$ şi $x_2 + 1 = 1$, $x_3 + 1 = 1$, …, $x_m = 1$. Rezultă $x_1 = p - 1$ şi $x_2 = x_3 = \ldots = x_m = 0$, deci $n = p_1^{p-1}$, cu p_1 număr prim;

b) 1) 121; 2) 961.

28. Fie a şi b două numere prime, iar x şi y două numere naturale.

a) Scrieţi divizorii numărului a^x. Care este numărul acestora?

b) Scrieţi divizorii numărului $a^x \cdot b$. Care este numărul acestora?

c) Scrieţi divizorii numărului $a^x \cdot b^2$. Care este numărul acestora?

29. Demonstraţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ numerele: $a = 5^n - 1$, $b = 6^n - 1$, $n \neq 1$, $c = 1\,007^n - 1$ şi $d = 2\,009^n - 1$ sunt compuse.

30. a) Determinaţi numerele naturale x şi y, ştiind că $x^2 + x + y = 58$ şi y este număr prim.

b) Determinaţi numerele naturale x şi y, ştiind că $3x + 5y + y^2 = 20$ şi x este număr prim.

c) Scrieţi numărul 2010 ca o sumă a unor numere naturale şi ca produs al aceloraşi numere naturale.

31. Scrieţi numerele ce urmează ca produs de două numere consecutive:

a) 12; b) 1122; c) 111222; d) $\underbrace{111\ldots1}_{2013}\underbrace{222\ldots2}_{2013}$.

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Un număr natural b, $b \neq 0$, este divizor al unui număr natural a dacă ....

(0,5p) **2.** Dacă $b \mid a$, spunem că b este un .... sau că a este un ....

(0,5p) **3.** Dacă a și b sunt numere naturale astfel încât $a \mid b$ și $b \mid a$, atunci ....

(0,5p) **4.** Divizorii comuni ai numerelor 18 și 24 sunt: ....

(0,5p) **5.** Dacă 10 este un divizor al unui număr natural a, alți 3 divizori ai numărului a sunt: ....

(0,5p) **6.** Numerele naturale cel mult egale cu 30, divizibile cu 2 și 5, sunt: ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Suma divizorilor naturali ai numărului 54 este egală cu:

A. 120 B. 100 C. 110 D. 130

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr natural care are exact 3 divizori este egal cu:

A. 6 B. 8 C. 2 D. 4

(0,5p) **3.** Fie mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 20 \vdots x\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \mid 14\}$. Numărul de elemente al mulțimii $A \cap B$ este:

A. 1 B. 0 C. 2 D. 4

(0,5p) **4.** Pentru a scrie toate numerele naturale mai mici decât 500, se folosește cifra 3 de un număr de:

A. 185 ori B. 200 ori C. 205 ori D. 195 ori

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Fie mulțimea $M = \{4, 6, 12, 30, 45, 18, 75\}$. Scrieți elementele mulțimilor: $A = \{x \in M \mid x \vdots 2\}$; $B = \{x \in M \mid x \vdots 9\}$; $C = \{x \in M \mid x \vdots 6\}$; $D = \{x \in M \mid x \vdots 15\}$.

(1p) **2.** Determinați numerele de forma $\overline{xy}$, astfel încât $36^n + \overline{xy}$ să fie divizibile cu 3.

(1p) **3.** Scrieți elementele mulțimilor:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{6}{x-1} \in \mathbb{N}\right\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 19 \text{ și } 4 \mid x + 6\}.$$

(1p) **4.** Arătați că $7^n \cdot 3^{2n} + 7^{n+1} \cdot 3^{2n} + 7^{n+1} \cdot 3 \cdot 9^n - 21^n \cdot 3^{n+1}$ se divide cu 13.

Capitolul II
Divizibilitatea numerelor naturale (II)

PP Competențe specifice:

- C₁. Identificarea în exemple, în exerciții sau în probleme a noțiunilor: c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.
- C₂. Utilizarea algoritmilor pentru determinarea c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c. a două sau mai multor numere naturale
- C₃. Exprimarea unor caracteristici ale relației de divizibilitate în mulțimea numerelor naturale, în exerciții și probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea
- C₄. Transpunerea unei situații-problemă în limbajul divizibilității în mulțimea numerelor naturale, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

PE-PP 1. Divizori comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.d.c.; numere prime între ele

Definiție: **Cel mai mare divizor comun** a două numere naturale a și b este un număr natural d, care:

1) divide pe a și pe b;
2) dacă $d' \mid a$ și $d' \mid b$, atunci $d' \mid d$.

Observații:

1. Cel mai mare divizor comun, prescurtat **c.m.m.d.c.**, a două numere naturale a și b se notează cu (a, b).

2. Pentru a afla c.m.m.d.c. a două sau mai multor numere naturale mai mari decât 1 se procedează astfel:
- se descompun numerele în produs de puteri de numere prime;
- se iau toți factorii primi comuni, o singură dată, la puterea cea mai mică și se înmulțesc între ei.

Exemplu: $\left.\begin{array}{l}420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\\ 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7\end{array}\right\} \Rightarrow (420, 504) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Definiție: Două sau mai multe numere naturale care au c.m.m.d.c. egal cu 1 se numesc **numere prime între ele.**

Exemple:

1. Orice numere prime diferite sunt prime între ele.
2. Numerele 18 și 35 nu sunt prime, dar sunt prime între ele.

Probleme rezolvate:

1. Demonstrați că oricare ar fi numerele naturale a, b și c, dacă $b \mid a$ și $c \mid a$ și $(b, c) = 1$, atunci $b \cdot c \mid a$.

Rezolvare: Din $b \mid a$ și $c \mid a$ rezultă $a = b \cdot p$ și $a = c \cdot q$ $(p, q \in \mathbb{N})$, de unde $b \cdot p = c \cdot q$. Cum $(b, c) = 1$, rezultă $p = c \cdot r$ $(r \in \mathbb{N})$. Deci $a = (b \cdot c) \cdot r$, adică $b \cdot c \mid a$.

2. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{3xy}$ divizibile cu 15.

Rezolvare: $15 \mid \overline{3xy} \Leftrightarrow 5 \mid \overline{3xy}$, $3 \mid \overline{3xy}$ și $(3, 5) = 1$. Dar $5 \mid \overline{3xy} \Leftrightarrow y \in \{0, 5\} \Leftrightarrow \overline{3xy} \in \{\overline{3x0}, \overline{3x5}\}$. Cum $3 \mid \overline{3x0} \Leftrightarrow 3 \mid (3 + x + 0) \Leftrightarrow 3 \mid (3 + x) \Leftrightarrow x \in \{0, 3, 6, 9\} \Leftrightarrow \overline{3x0} \in \{300, 330, 360, 390\}$ și $3 \mid \overline{3x5} \Leftrightarrow 3 \mid (3 + x + 5) \Leftrightarrow 3 \mid (8 + x) \Leftrightarrow x \in \{1, 4, 7\} \Leftrightarrow \overline{3x5} \in \{315, 345, 375\}$.
Numerele căutate sunt: 300, 315, 330, 345, 360, 375, 390.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Calculați:
a) (2, 4); b) (4, 6); c) (5, 10); d) (9, 15);
e) (3, 6, 9); f) (2, 4, 6, 10); g) (10, 20, 30, 50); h) (2, 4, 8);
i) (4, 18, 32); j) (5, 15, 30, 45); k) (12, 24, 36); l) (4, 15, 60).

2. Dați exemple de numere care au cel mai mare divizor comun egal cu:
a) 2; b) 6; c) 10; d) 14.

3. Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor:
a) 24, 36, 54; b) 24, 45, 72; c) 30, 48, 76; d) 216, 300, 432;
e) 288, 1 260; f) 1 890, 2 268; g) 450, 1 300; h) 112, 252.

4. Scrieți toate perechile de numere prime între ele ce se pot forma cu numerele: 2, 4, 9, 14.

5. Produsul a două numere naturale este 102. Aflați numerele. Câte soluții are problema?

6. Calculați $D_{96} \cap D_{72}$.

PE Aplicare și exersare **

7. a) Aflați perechile de numere prime între ele a căror sumă este 16.
b) Aflați toate perechile de numere compuse de o cifră cel puțin egale cu 6 care sunt prime între ele.
c) Aflați toate perechile de numere compuse de două cifre cel mult egale cu 18.

8. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) (441, 144) = 3; b) (1 970, 1 440) = 1; c) (270, 162) = 8.

9. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{17xy}$ divizibile cu 6.

10. Determinați numerele naturale de forma $\overline{xyy}$ divizibile cu 18.

11. Determinați numerele naturale de forma $\overline{xyzz}$ divizibile cu 10, știind că $x + y = 9$.

12. Determinați numerele naturale de forma $\overline{xyzz}$ divizibile cu 12, știind că $x + y = 4$, $x \neq y$.

13. Produsul a două numere naturale este 2 160 și cel mai mare divizor comun al lor este 12. Aflați cele două numere.

14. Suma a două numere naturale este 35 şi cel mai mare divizor comun al lor este 7. Aflaţi cele două numere.

15. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{3x2y}$ divizibile cu:

a) 6; b) 12; c) 15; d) 18.

16. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{4x1y}$ divizibile cu 15, ştiind că $x + y = 7$.

17. Scrieţi perechile de numere prime între ele a căror sumă este:

a) 12; b) 14; c) 15; d) 18.

18. Determinaţi numerele de forma $\overline{xy0y}$ divizibile cu 18.

19. Aflaţi cifra x, astfel încât:

a) $(\overline{32x}, 2) = 1$; b) $(\overline{x16}, 3) = 1$; c) $(\overline{3x2}, 5) = 1$.

PE Aprofundare şi performanţă ***

20. Împărţind numerele 1 832, 2 927 şi 2 572 la acelaşi număr natural nenul, se obţin resturile 17, 23 şi 31. Aflaţi toate valorile împărţitorului.

21. Aflaţi numerele naturale a şi b astfel încât:

a) $(a, b) = 7$ şi $a \cdot b = 588$; b) $(a, b) = 18$ şi $a + b = 324$.

22. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{xyzy}$ divizibile cu 15, ştiind că $x + y = 5$.

23. Arătaţi că: a) $(3n + 7, 4n + 9) = 1$; b) $(8n + 13, 5n + 8) = 1$;

c) $(2n + 3, 5n + 7) = 1$; d) $(n + 4, 3n + 13) = 1$.

24. Calculaţi numărul maxim de copii cărora le putem împărţi, în mod egal, 480 de mandarine şi 320 de mere.

25. Împărţind numerele 2 438, 1 553 şi 1 116 la acelaşi număr natural, se obţin resturile 7, 6 şi respectiv 11. Determinaţi numărul la care au fost împărţite.

PE-PP 2. Multiplii comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.m.c.

Definiţie: **Cel mai mic multiplu comun** a două numere naturale a şi b este un număr natural m, care:

1) este multiplu al lui a şi al lui b;

2) dacă $m' \vdots a$ şi $m' \vdots b$, atunci $m' \vdots m$.

Observaţii:

1. Cel mai mic multiplu comun, prescurtat **c.m.m.m.c.**, a două numere naturale a şi b se notează cu $[a, b]$.

2. Pentru a afla c.m.m.m.c. a două numere naturale, se procedează astfel:

- se descompun numerele în produs de puteri de numere prime;
- se iau factorii primi comuni şi necomuni, o singură dată, la puterea cea mai mare şi se înmulţesc între ei.

Exemplu: $\left.\begin{array}{l} 20 = 2^2 \cdot 5 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 16 = 2^4 \end{array}\right\} \Rightarrow [20, 18, 16] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi:

a) [3, 4]; b) [2, 4, 8]; c) [10, 15, 30]; d) [2, 4, 5];
e) [20, 40, 50]; f) [4, 8, 16]; g) [12, 24, 36]; h) [4, 6, 12].

2. Daţi exemple de perechi de numere naturale care au cel mai mic multiplu comun egal cu:

a) 8; b) 13; c) 24; d) 36.

3. Aflaţi cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a) 24, 48, 72; b) 90, 100, 300; c) 180, 320, 432; d) 135, 270, 588;
e) 288, 1 260; f) 1 890, 2 268; g) 450, 1 350; h) 112, 252.

4. Produsul a două numere naturale este 175 şi c.m.m.d.c. al lor este 5. Aflaţi c.m.m.m.c. al acestor numere.

5. Aflaţi cel mai mic număr natural care împărţit pe rând la 6 şi la 15 să dea acelaşi rest 3 şi câtul diferit de zero.

6. ***Pentru a, b*** $\in \mathbb{N}$, ***avem că*** $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$. Verificaţi această proprietate pentru:

a) $a = 420, b = 504$; b) $a = 216, b = 96$; c) $a = 150, b = 98$.

7. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) [270, 405, 162] = 810; b) [36, 64, 76] = 72;
c) [144, 96, 196] = 588; d) [976, 490, 578] = 2 928.

PE Aplicare şi exersare **

8. Cantitatea de cereale dintr-un siloz poate fi transportată în camioane de 7 t, 6 t şi 9 t. Aflaţi această cantitate, ştiind că este cuprinsă între 2 200 t şi 2 300 t.

9. Determinaţi numerele naturale a şi b, ştiind că $(a, b) = 28$ şi $[a, b] = 784$.

10. Aflaţi cel mai mic număr natural care împărţit la 9 şi la 12 dă restul 3 şi câturi nenule.

11. Aflaţi cel mai mic număr natural care împărţit la 8, 12 şi 15 dă resturile 7, 11 şi 14.

12. Aflaţi numerele a şi b, ştiind că:

a) $(a, b) = 48$ şi $[a, b] = 144$; b) $(a, b) = 231$ şi $[a, b] = 693$;
c) $(a, b) = 48$ şi $a \cdot b = 6\,912$; d) $[a, b] = 144$ şi $a \cdot b = 6\,912$.

13. Calculaţi c.m.m.m.c. al numerelor: $81^{12} + 9^{24}$ şi $27^{15} + 3^{45}$.

14. Care este cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloane de câte 6 elevi, 8 elevi şi 12 elevi?

15. Determinaţi numerele naturale nenule cuprinse între 900 şi 1 000 care împărţite la 6 dau restul 5, împărţite la 7 dau restul 6 şi împărţite la 11 dau restul 10.

16. Trei autobuze pleacă în acelaşi timp dintr-o staţie. Unul revine în staţie din 2 în 2 ore, al doilea din 3 în 3 ore, iar al treilea din 8 în 8 ore. După câte ore se întâlnesc din nou în staţie cele trei autobuze?

17. Calculaţi c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. al numerelor:

a) 48 şi 144; b) 231 şi 693;
c) 1 890 şi 2 268; d) 372, 360 şi 900.

18. Aflaţi cel mai mic număr natural care împărţit la 6, 14 şi 18 dă resturile 3, 11 şi 15.

19. Aflați numerele naturale mai mari decât 200 și mai mici decât 500 care împărțite la 4, 12 și 15 dau restul 2.

20. Determinați cel mai mic și cel mai mare număr natural de trei cifre care împărțite pe rând la 8, 12 și 21 dau același rest diferit de zero.

PE Aprofundare și performanță ***

21. La festivitatea de deschidere a anului școlar, elevii școlii „George Călinescu" pot să se așeze în coloane de câte 10, 12 și 18. Calculați câți elevi are școala dacă numărul lor este mai mare decât 1 300 și mai mic decât 1 500.

22. Calculați c.m.m.m.c. al numerelor naturale nenule a și b, știind că:

a) $a \cdot b = 19\ 440$ și $(a, b) = 18$;

b) $a \cdot b = 1\ 750$ și $(a, b) = 5$;

c) $a \cdot b = 4\ 200$ și $(a, b) = 10$.

23. a) Dovediți că numerele naturale de forma $2^{n+2} \cdot 5^{n+1} + 1$ sunt divizibile cu 3, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Dovediți că produsul a patru numere consecutive se divide cu 24.

24. a) Arătați că suma a șase puteri consecutive ale numărului 3 este multiplu de 364.

b) Arătați că suma a opt puteri consecutive ale numărului 2 este multiplu de 17.

25. a) Arătați că orice număr natural care împărțit la 55 dă restul 22 este multiplu de 11.

b) Arătați că nu există niciun număr natural care împărțit la 6 să dea restul 5 și împărțit la 3 să dea restul 1.

PE-PP Supermate ****

26. Fie numerele $a = 2n + 5$ și $b = 5n + 12$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că $[a, b] = a \cdot b$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. (Prin $[a, b]$ s-a notat cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.)

Maranda Linț, Deva

27. Se consideră numerele naturale $a = 3x + 5$ și $b = x + 3$.

a) Arătați că $(a + b)(a - b)$ este multiplu de 2^4.

b) Aflați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $a + 8$ să fie multiplu al lui b.

28. Stabiliți dacă numărul $3^{2008} + 6$ este divizibil cu 11.

R.M.H. nr. 7/2008

Rezolvare: $3^{2008} + 6 = 3^3 \cdot 3^{2005} + 6 = 3^3 \cdot (3^5)^{401} + 6 = 3^3 \cdot 243^{401} + 6 = 3^3 \cdot (2 \cdot 11^2 + 1)^{401} + 6 =$
$= 3^3 \cdot (M_{11} + 1)^{401} + 6 = 3^3 \cdot (M_{11} + 1^{401}) + 6 = 27(M_{11} + 1) + 6 = M_{11} + 27 + 6 = M_{11} + 33 = M_{11}$, adică $3^{2008} + 6$ este divizibil cu 11.

29. Arătați că oricare ar fi trei numere, atunci există două dintre ele a căror diferență este divizibilă cu 4.

30. Fie $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor A_0, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2005}$.

Dorin Linț, Deva

PE-PP 3. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea

PE Înțelegere *

1. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

$A = \{x \mid x \in M \text{ și } x \mid 12\}$; $B = \{x \mid x \in M \text{ și } 2 \mid x\}$;

$C = \{x \mid x \in M \text{ și } x \mid 15\}$; $D = \{x \mid x \in M \text{ și } 3 \mid x\}$.

2. Determinați numerele de forma $\overline{xyxy}$, scrise în baza zece, divizibile cu 15.

3. Arătați că numărul $N = 2^{111} + 3^{222} + 4^{333} + 5^{444} + \ldots + 9^{888}$ se divide cu 5.

4. Arătați că suma a șase puteri consecutive ale lui 2 se divide cu 7.

5. Arătați că, dacă suma a două numere naturale nenule este un număr prim, atunci cele două numere sunt prime între ele.

6. Determinați perechi de numere prime astfel încât suma lor să fie un număr natural impar de forma $\overline{aaa}$. (Numerele sunt scrise în baza 10.)

7. Determinați cel mai mic număr natural având numărul divizorilor 14.

8. Arătați că numărul divizorilor unui număr natural a de forma $a = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k$ ($b_1, b_2, \ldots, b_k$ sunt numere prime distincte două câte două) este o putere a lui 2.

9. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$ avem că numărul $10^x + 8$ este divizibil cu 6.

10. Arătați că numărul $34^{43} - 43^{34}$ este divizibil cu 5.

11. a) Determinați cifra a astfel încât $\overline{1a3}$ să aibă cei mai mulți divizori.

b) Determinați cifra a astfel încât $\overline{1a3}$ să aibă cei mai puțini divizori.

12. Determinați cifra a astfel încât numerele de forma:

a) $\overline{23a}$; b) $\overline{25a4}$; c) $\overline{3a2}$ să fie divizibile cu 2.

13. Determinați cifra x astfel încât numerele de forma:

a) $\overline{63x}$; b) $\overline{7x83}$; c) $\overline{x123}$ să fie divizibile cu 3.

14. Arătați că din patru numere naturale cel puțin două au diferența divizibilă cu 3.

15. Arătați că din oricare șase numere naturale se pot alege două a căror diferență este divizibilă cu 5.

16. Determinați numerele naturale (x, y), pentru care:

a) $x \cdot y = 25$; b) $2x \cdot 3y = 15$; c) $x(y + 3) = 24$; d) $x^2y = 48$.

PE Aplicare și exersare **

17. Determinați a, astfel încât:

a) $15_{(a)}$ divide 30; b) $21_{(a)}$ divide 23; c) $110_{(a)}$ divide 72.

18. Suma a două numere naturale este 12. Știind că primul număr este divizibil cu al doilea, aflați cele două numere.

19. Aflați cel mai mic număr natural nenul care, împărțit la 4, 5 și 7, dă același rest nenul și este multiplu al lui 13.

20. Determinați numerele naturale a și b nenule, știind că:

$$a + b = 20; \quad (a, b) = 4; \quad (a + 2, b + 2) = 6.$$

21. Determinați numerele naturale a, știind că: $(a, 25) = 5$ și $[a, 25] = 150$.

22. Care este distanța cea mai mică care se poate măsura simultan cu unități de măsură de 18 m și 24 m?

23. Determinați numerele naturale nenule a, b, știind că:

$$(a, b) = 10 \text{ și } 3a + 5b = 180.$$

24. Determinați c.m.m.d.c. al numerelor:

a) $\overline{1x2}$, $\overline{3x2}$, $\overline{5x2}$; b) $\overline{1x5}$, $\overline{3x5}$, $\overline{7x5}$.

25. Dacă a, b sunt numere prime, determinați $(a + b, a - b)$.

26. Determinați cel mai mic număr natural diferit de zero care împărțit la 9 dă restul 8, împărțit la 6 dă restul 5 și împărțit la 3 dă restul 2.

27. Determinați numerele naturale cuprinse între 1 200 și 1 300 care împărțite la 9, 6 și 3 dau, respectiv, resturile 8, 5 și 2.

28. Determinați cel mai mic număr natural diferit de zero care împărțit la 12, 28 și, respectiv, 36 dă de fiecare dată restul 7.

29. Determinați numerele naturale mai mari ca 900 și mai mici decât 1 600 care împărțite la 12, 28 și, respectiv, 36 dau de fiecare dată restul 7.

30. Numerele 1 005 și 2 005, împărțite la același număr natural a, $a \neq 0$, dau resturile 4 și, respectiv, 3. Determinați toate valorile lui a.

31. Demonstrați că:

a) $(2n + 3, 5n + 7) = 1$; b) $(n + 3, 2n + 7) = 1$; c) $(4n + 5, 5n + 6) = 1$;
d) $(2n + 1, 3n + 2) = 1$; e) $(5n + 6, 6n + 7) = 1$; f) $(3n + 4, 5n + 7) = 1$.

32. Determinați numerele naturale a și b, pentru care avem:

a) $(a, b) = 15$ și $a \cdot b = 2\,700$; b) $(a, b) = 15$ și $a + b = 225$;
c) $(a, b) = 14$ și $[a, b] = 490$; d) $a \cdot b = 34\,560$ și $[a, b] = 72$.

33. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{x12y6}$ divizibile cu 18.

34. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{xyxx}$ divizibile cu 36.

35. Determinați toate numerele de forma $\overline{x23y}$ divizibile cu 4, știind că x este cifră impară.

36. Determinați toate numerele de forma $\overline{xyxx}$ divizibile cu 12.

PE Aprofundare și performanță ***

37. Determinați x astfel încât:

a) $(\overline{13x}, 2) = 1$; b) $(\overline{1x4}, 3) = 1$; c) $(\overline{38x}, 5) = 1$;
d) $(\overline{56x}, 4) = 1$; e) $(\overline{25x}, 9) = 1$; f) $(\overline{24x}, 12) = 1$.

38. Arătați că numărul $A = 12^n \cdot 24 + 3^{n+2} \cdot 4^{n+1} + 2^{n+3} \cdot 6^n$ este divizibil cu 17, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

39. Arătați că numărul $A = 3^{2n+5} \cdot 7^n - 63^{n+1} - 3^{2n+1} \cdot 7^{n+2}$ este divizibil cu 33, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

40. Arătați că numărul $A = 3^n \cdot 7^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 7^n + 3^{n+1} \cdot 7^{n+1}$ este divizibil cu 31, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

41. Arătați că numărul $A = 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} + 3^{n+4}$ este divizibil cu 11, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

42. Arătați că numărul $A = 3 \cdot 2^n + 2^{n+1} + 5 \cdot 2^{n+1} + 2^{n+3}$ este divizibil cu 23, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

43. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \mid x = \overline{3a2b} \text{ și } \overline{3a2b} \vdots 18\} \text{ și } B = \{y \mid y = \overline{3c2d} \text{ și } \overline{3c2b} \vdots 12\},$$

apoi calculați $(A \cup B) - (A \cap B)$ și $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

44. Se consideră numărul $a = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2015}$. Arătați că:

a) a este număr par; b) numărul a se divide cu 13.

45. Fie numărul $a = \overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy}$.

a) Arătați că a se divide cu 111.

b) Poate fi numărul a pătrat perfect? Justificați.

4. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1. ***La cumpărături***

Într-un magazin alimentar, casierul i-a înmânat unui cumpărător un bon de 29,17 lei. Aruncându-și o privire asupra bonului, clientul i l-a înapoiat, spunându-i:

— Am de achitat 90 de bani pentru 2 pachete de sare și 2,70 lei pentru 2 bucăți de săpun. În afară de asta, mai am de plătit 3 pachețele cu zahăr vanilat și 6 cutii cu chibrituri, dar nu-mi amintesc prețul zahărului și al chibriturilor. Cred totuși că ați greșit suma totală.

Casierul a verificat și a recunoscut că a greșit, eliberând cumpărătorului un alt bon. Cum a descoperit cumpărătorul greșeala casierului?

2. ***Coșul cu ouă***

Mihai, aflat în vacanță la bunici, din neatenție a scăpat din mână un coș cu ouă.

— Bunicule, câte ouă ai avut în coș?

— Nu-mi aduc aminte. Știu că, dacă le scoteam câte 2, câte 3, câte 4 sau câte 5, în coș rămânea un singur ou, iar dacă le scoteam câte 7, nu rămânea niciunul.

Câte ouă erau în coș?

3. ***Daruri de Anul Nou***

Pregătind pachetele cu daruri de Crăciun pentru o grădiniță, s-au cumpărat mai puțin de 3000 de portocale. Când să le împărțim, ne-am lovit de o mică problemă. Am vrut să punem câte 10 în fiecare pachet. Din păcate, împărțirea nu se putea face exact, deoarece unul dintre pachete n-ar fi avut decât 9 portocale; dacă am fi pus câte 9 portocale în fiecare pachet, atunci unul din ele ar fi rămas numai cu 8; am încercat să punem câte 8, dar unul rămânea cu 7; când le-am împărțit câte 7, ultimului pachet îi rămâneau 6. În sfârșit, le-am împărțit câte 6 și ultimului pachet îi reveneau 5 portocale.

Am luat o coală de hârtie, un creion și am început să calculăm. Ce să vezi? Dacă împărțeam numărul portocalelor la 5, rămânea un rest de 4; dacă-l împărțeam la 4, rămânea un rest de 3; dacă împărțeam la 3, rămânea rest 2; în sfârșit, dacă împărțeam la 2, rămânea o portocală. Ciudat număr de portocale aveam. Puteți să spuneți câte portocale erau?

4. ***În port, la Constanța***

În portul Constanța de la Marea Neagră erau ancorate patru vapoare. În data de 15 iulie 2011, la amiază, toate patru au părăsit în același timp portul. Se știe că primul vapor revine în portul respectiv din 4 în 4 săptămâni, al doilea din 8 în 8 săptămâni, al treilea la fiecare 12 săptămâni, iar al patrulea la 16 săptămâni. În ce dată s-au întâlnit din nou în port toate cele patru vapoare?

5. ***Bomboanele de ciocolată***

Un laborator de cofetărie a produs într-o zi 411 bomboane de ciocolată de tip A și 685 de bomboane de tip B. Bomboanele respective trebuie ambalate în cutii identice, astfel încât numărul cutiilor rezultate să fie cel mai mare posibil și fiecare cutie să conțină același număr de bomboane de tip A și același număr de bomboane de tip B.

Stabiliți numărul de bomboane de tip A și de tip B din fiecare cutie și numărul total al cutiilor.

PE-PP 5. Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. a) Descompuneți în factori primi numerele 210 și 441.
b) Calculați c.m.m.m.c. al numerelor 210 și 441.

2. a) Descompuneți în factori primi numerele 294 și 252.
b) Calculați c.m.m.d.c. al numerelor 210 și 441.

3. Determinați numerele naturale a și b, știind că c.m.m.d.c. al lor este 6, iar suma este 42.

4. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale a și b este 180, iar produsul celor două numere este egal cu 1 620. Calculați c.m.m.d.c. al celor două numere.

5. Determinați cifra x, știind că numerele $\overline{13x}$ și 18 sunt prime între ele.

6. Arătați că numerele $2x + 1$ și $3x + 2$ sunt prime între ele, oricare ar fi numărul natural x.

7. Determinați numerele naturale a și b, știind că c.m.m.d.c. al lor este 21, iar produsul lor este 15 435.

8. Profesorul de matematică dorește să lucrăm pe grupe. Dacă ne grupează câte 2, rămâne un elev singur. Dacă ne grupează câte 3, rămân doi elevi, iar dacă ne grupează câte 5, rămân 4 elevi. Aflați numărul elevilor clasei.

9. Terasa Alexandrei, în formă de dreptunghi cu dimensiunile de 4,5 m și 3,6 m, este placată cu gresie. Toate plăcile de gresie au formă de pătrat și aceleași dimensiuni. Se știe că a fost acoperită toată suprafața fără să fie plăci tăiate și că numărul plăcilor de gresie a fost cel mai mic posibil. Calculați lungimea laturii unei plăci de gresie.

TESTUL 2

1. a) Descompuneți în factori primi numerele 440 și 539.
b) Calculați c.m.m.m.c. al numerelor 440 și 539.

2. a) Descompuneți în factori primi numerele 525 și 420.
b) Calculați c.m.m.d.c. al numerelor 525 și 420.

3. Determinați numerele naturale a și b, știind că c.m.m.d.c. al lor este 14, iar suma este 98.

4. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale a și b este 385, iar produsul celor două numere este egal 2 695. Calculați c.m.m.d.c. al celor două numere.

5. Determinați cifra x, știind că numerele $\overline{25x}$ și 12 sunt prime între ele.

6. Arătați că numerele $4x + 3$ și $5x + 4$ sunt prime între ele, oricare ar fi numărul natural x.

7. Determinați numerele naturale a și b, știind că c.m.m.d.c. al lor este 35, iar produsul lor este 14 700.

8. Profesorul de matematică dorește să lucrăm pe grupe. Dacă ne grupează câte 2 sau câte 3 sau câte 5, observă că de fiecare dată rămâne un elev singur. Aflați numărul elevilor clasei.

9. Terasa Mihaelei are formă de dreptunghi cu dimensiunile de 4,8 m și 4,2 m și este placată cu gresie. Toate plăcile de gresie au formă de pătrat și aceleași dimensiuni. Se știe că numărul plăcilor de gresie a fost cel mai mic posibil. Calculați lungimea laturii unei plăci de gresie.

TESTUL 3

1. Scrieți mulțimea divizorilor numărului 24.

2. Se consideră șirul de numere: 5, 18, 21, 4, 54, 12, 9, 39.
a) Scrieți multiplii numărului 3 care se găsesc în șir.
b) Scrieți divizorii numărului 36 care se găsesc în șir.

3. Descompuneți numărul 1176 în factori primi.

4. Scrieți multiplii numărului 102 cuprinși între 300 și 500.

5. Arătați că, dacă la împărțirea unui număr natural n la 85 se obține restul 51, numărul n este divizibil cu 17.

6. Scrieți numerele de forma $\overline{5a3b}$ divizibile cu 15.

7. Determinați numerele prime a și b, știind că: $5a + 20b = 110$.

8. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea numerelor prime cuprinse între 12 și 24.

9. a) Arătați că $8 + 8^2 + 8^3$ este divizibil cu 73.
b) Este divizibil cu 73 numărul $8 + 8^2 + 8^3 + \ldots + 8^{42}$? Justificați răspunsul.

TESTUL 4

1. Scrieți mulțimea divizorilor numărului 36.

2. Se consideră șirul de numere: 4, 15, 24, 12, 8, 16, 6, 51.
a) Scrieți multiplii numărului 3 care se găsesc în șir.
b) Scrieți divizorii numărului 24 care se găsesc în șir.

3. Descompuneți în factori primi numărul 2940.

4. Scrieți multiplii numărului 201 cuprinși între 400 și 800.

5. Arătați că, dacă la împărțirea unui număr natural n la 91 se obține restul 65, numărul n este divizibil cu 13.

6. Scrieți numerele de forma $\overline{5a3b}$ divizibile cu 6.

7. Determinați numerele prime a și b, știind că: $3a + 12b = 66$.

8. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea numerelor prime cuprinse între 18 și 36.

9. a) Arătați că $6 + 6^2 + 6^3$ este divizibil cu 43.
b) Este divizibil cu 43 numărul $6 + 6^2 + 6^3 + \ldots + 6^{42}$? Justificați răspunsul.

TESTUL 5

1. Care poate fi restul împărțirii unui număr natural la 7?

2. Calculați un număr știind că, dacă din triplul său se scade 7, rezultatul obținut se împarte la 11, iar dacă noul rezultat se micșorează cu 2, se obține 5.

3. Calculați:
a) $(5^2 - 2^5 : 2) : 3 - 1^{2005}$;
b) $(3^2 \cdot 2^6 - 2^3 \cdot 6) : 12 - 2^5$;
c) $(7^4 - 7^3) : (7^2 - 7) - 2^3 \cdot 5$.

4. Arătați că numărul $5^7 + 6^{2005} + 11^{2004}$ nu este pătrat perfect.

5. Determinați numerele de forma $\overline{4x2y}$ care sunt divizibile cu 9 și care nu sunt divizibile cu 5.

6. Fie mulțimile: $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{6}{x} \in \mathbb{N}\right\}$; $B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{12}{2x+1} \in \mathbb{N}\right\}$ și $C = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \overline{3x1} \in \mathbb{N}\right\}$.

Calculați: A, B, C și $B - (A \cap C)$.

7. Determinați numerele de forma $\overline{7x2y}$, $x \neq y$, divizibile cu 20.

8. Descompuneți în factori primi numerele: 1 980 și 2 430.

9. Arătați că numerele $3^{n+1} - 3^n$ și $5^{n+1} - 5^n$ nu sunt prime între ele.

TESTUL 6

1. Determinați numerele a și b, știind că $(a, b) = 7$ și $a + b = 35$.

2. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 6 și la 15 să dea același rest 3 și câtul diferit de zero.

3. Calculați $x \in \mathbb{N}$, știind că $(x + 1) \mid (x + 8)$.

4. Determinați numerele de forma $\overline{7xy}$ divizibile cu 45.

5. Calculați ținând cont de ordinea efectuării operațiilor:
a) $2 \cdot (1020 : 85 + 205) : [33 \cdot 18 - (50 \cdot 10 + 23 \cdot 4)] + 1343 : 17 - 262$;
b) $(3 \cdot 15^{12} + 2 \cdot 15^{12}) : 15^{11} + (3^2 + 3^2)^3 : (3^3 + 3^3) : 3 + 1^{2005} - 2005^0$.

6. Determinați x astfel încât numerele de forma $\overline{53x}$ să fie divizibile cu:
a) 3; b) 5; c) 2; d) 4; e) 9.

7. Arătați că produsul a trei numere consecutive este totdeauna multiplu de 6.

8. Se dau numerele naturale: 7 425, 5 412, 31 436, 84 300, 49 372. Aflați numerele divizibile cu:
a) 4; b) 9; c) 25.

9. Determinați x și y astfel încât numerele de forma $10^n + \overline{xy}$ să fie divizibile cu 9.

TESTUL 7

1. Determinați numerele naturale a și b, știind că: $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 2\,160$.

2. Determinați numerele naturale cuprinse între 900 și 1000 care împărțite la 6 dau restul 5, împărțite la 7 dau restul 6 și împărțite la 11 dau restul 10.

3. Determinați numerele prime a, b și c care verifică egalitatea:
$$a + 38b + 60c = 198.$$

4. Determinați valorile lui x din:
a) $[(324 + 205 : 5 - x) : 6] \cdot 3 + 127 = 307$;
b) $300 - [48 + 6 \cdot 7 - (x : 3 + 15)] : 3 = 276$.

5. Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât:
a) $\frac{15}{x+2} \in \mathbb{N}$;
b) $\frac{17}{2x-1} \in \mathbb{N}$.

6. Scrieți divizorii proprii ai numerelor:
a) 12; b) 18; c) 29.

7. Determinați x și y, știind că numerele de forma $\overline{x5y}$ sunt divizibile cu 12.

8. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $(2^{11} \cdot 7^5 + 2^8 \cdot 7^5) \vdots 9$.

9. Fie mulțimile: $A = \{\overline{32a} \mid \overline{32a} \vdots 2\}$ și $B = \{\overline{32a} \mid \overline{32a} \vdots 4\}$. Determinați elementele mulțimilor A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Singurul număr prim și par este ……, celelalte numere prime fiind ………………

(0,5p) **2.** Se numește număr compus ……………………………………………………

(0,5p) **3.** Mulțimea divizorilor naturali ai lui 12 este ……………………………………

(0,5p) **4.** C.m.m.d.c. al numerelor 10 și 18 este egal cu …… .

(0,5p) **5.** C.m.m.m.c. al numerelor 24 și 20 este egal cu ……

(0,5p) **6.** Dacă cel mai mare divizor comun a două numere este 1, atunci cel mai mic multiplu comun al lor este ……

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Numărul 2014 are un număr de divizori egal cu:

A. 4 B. 2 C. 6 D. 8

(0,5p) **2.** Divizorii proprii ai numărului 2013 sunt:

A. {2013, 3, 11} B. {33, 61, 1}
C. {183, 11, 7} D. {3, 11, 33, 61, 183, 671}

(0,5p) **3.** Cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 3, la 4 și la 5 dă restul 2 și câtul diferit de zero este egal cu:

A. 72 B. 52 C. 42 D. 62

(0,5p) **4.** Numerele 455, 759 și 1062 împărțite la același număr natural dau resturile 2, 4 și respectiv 5. Împărțitorul este:

A. 21 B. 151 C. 35 D. 105

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Calculați cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) și cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al numerelor: 16, 120, 48.

(1p) **2.** Determinați toate numerele naturale a și b care au ca cel mai mare divizor comun pe 5, au suma numerelor 65, iar produsul numerelor este pătrat perfect.

(1p) **3.** Arătați că numerele $2n + 3$ și $3n + 4$ sunt prime între ele.

(1p) **4.** Determinați toate numerele naturale a și b care au cel mai mic multiplu comun egal cu 60, iar suma numerelor egală cu 19.

PE-PP Probleme pentru pregătirea concursurilor şcolare

1. Considerăm patru numere prime distincte a, b, c, d mai mari decât 3, cu suma divizibilă cu 6. Demonstraţi că numărul $A = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(c - d)$ se divide cu 576.

Stelian Moga, Orăştie

2. Pentru n număr natural nenul, notăm cu P_n produsul divizorilor naturali ai numărului n. Determinaţi n cu proprietatea că $P_n = 6^{1575}$.

Nicolae Stănică, Brăila

Rezolvare: Din $P_n = 6^{1575} = 2^{1575} \cdot 3^{1575}$ se deduce că $n = 2^x \cdot 3^y$, cu x şi y numere naturale. Divizorii lui n sunt: $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^x, 3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots, 3 \cdot 2^x, \ldots, 3^y, 3^y \cdot 2, 3^y \cdot 2^2, 3^y \cdot 2^3, \ldots, 3^y \cdot 2^x$. Ca urmare: $P_n = (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^x)^{y+1} \cdot (3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^y)^{x+1}$, adică: $P_n = 2^{\frac{x(x+1)(y+1)}{2}} \cdot 3^{\frac{y(y+1)(x+1)}{2}}$. Dar $P_n = 6^{1575}$, adică $x(x + 1)(y + 1) = 3150$ şi $y(y + 1)(x + 1) = 3150$. Analizând cele două relaţii, se obţine că $x = y$ şi din $x(x + 1)^2 = 3150 = 14 \cdot 15^2 \Rightarrow x = y = 14$. Se obţine că $n = 6$.

3. Fie a un număr natural astfel încât numerele $a + 2$, $a + 4$, $a + 8$, $a + 10$, $a + 16$ sunt simultan prime. Arătaţi că $x = (a + 2)^n + (a + 4)^n - (a - 1)^n$ se divide cu 10 pentru orice n număr natural nenul.

Relu Ciupea, Olteniţa

4. Determinaţi numerele prime a, b, c mai mici decât 30, distincte între ele, pentru care $abc + 1$ şi $abc - 1$ sunt de asemenea numere prime.

Dumitru Acu, Sibiu

5. Arătaţi că numărul $10^{20} + 3 \cdot 10^{10} - 1$ nu este pătrat perfect.

Ion Fota, Izbiceni, Olt

6. Determinaţi valorile naturale ale lui n pentru care: $(3x + 11, 5x - 3) = 2^n$, unde x este număr natural, iar (a, b) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

Valer Pop, Şanţ, Bistriţa

Rezolvare: Dacă 2^n este c.m.m.d.c., atunci $2^n \mid (3x + 11)$ şi $2^n \mid (5x - 3)$. Din relaţiile anterioare rezultă că $2^n \mid (15n + 55)$ şi $2^n \mid (15n - 9)$, adică 2^n divide diferenţa lor $2^n \mid 64$. Ca urmare $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

7. Fie n, $n + 2$, $n + 6$ trei numere naturale şi S suma lor.

a) Daţi exemplu de cel puţin trei valori pentru $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numerele n, $n + 2$, $n + 6$ sunt simultan numere prime.

b) Dacă n, $n + 2$, $n + 6$ sunt simultan numere prime, arătaţi că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $S = 9k + 5$.

c) Dacă n, $n + 2$, $n + 6$ sunt numere prime, determinaţi restul împărţirii numărului S la 18.

Traian Covaciu, Baia Mare

8. Arătaţi că numerele $a = 2^n \cdot 5^{n+1} + 7$ şi $b = 2^{n+1} \cdot 5^n + 3$ sunt prime între ele, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Concursul „Arhimede", 2008

9. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n + 8 \cdot (m + 1) = m \cdot (n + 1)$. Determinaţi m şi n astfel încât cel mai mare divizor comun al numerelor $(m + n)$ şi $(n^2 + 2n)$ să fie maxim.

Adrian Banu, Râmnicu-Vâlcea

10. Se consideră numărul $A_n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n^n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2005}$.

Dorin Linţ, Deva

Rezolvare: Dăm valori lui n şi cercetăm divizorii numerelor $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2005}$.

Pentru $n = 1 \Rightarrow A_1 = 0$.

Pentru $n = 2 \Rightarrow A_2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 30 \cdot 17$.

Pentru $n = 3 \Rightarrow A_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 82 = 30 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 7$.

Pentru $n = 4 \Rightarrow A_4 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 = 30 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 257$.

Se observă că A_1, A_2, A_4 se divid cu 17 şi A_3 nu se divide cu 17 şi, de asemenea, se observă că fiecare din cele patru numere A_1, A_2, A_3, A_4 se divide cu 30.

Demonstrăm că orice A_n are ca divizor pe 30. Un număr se divide cu 30 dacă şi numai dacă se divide cu 2, cu 3 şi cu 5, numerele 2, 3 şi 5 fiind prime între ele. Avem că A_n conţine cel puţin doi factori numere consecutive şi ca urmare este multiplu de 2. A_n conţine trei factori consecutivi $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ şi ca urmare este multiplu de 3.

Privind divizibilitatea cu 5, există următoarele posibilităţi: $n \in \{5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4\}$.

Dacă $n = 5k$, deoarece unul dintre factori este n, rezultă că A_n se divide la 5.

Dacă $n = 5k + 1$, atunci factorul $n - 1 = 5k$ este divizibil cu 5 şi ca urmare A_n se divide cu 5.

Dacă $n = 5k + 2$, atunci factorul $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = M_5 + 2^2 + 1 = M_5 + 5 = M_5$ şi ca urmare $A_n \,\vdots\, 5$.

Dacă $n = 5k + 3$, atunci factorul $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = M_5 + 3^2 + 1 = M_5 + 10 = M_5$ şi ca urmare $A_n \,\vdots\, 5$.

Dacă $n = 5k + 4$, atunci factorul $n + 1 = 5k + 4 + 1 = 5 \cdot (k + 1)$ este divizibil cu 5 şi ca urmare $A_n \,\vdots\, 5$.

Deci oricare ar fi n număr natural nenul, A_n este divizibil cu numerele prime 2, 3 şi 5 şi deci şi cu produsul lor, adică $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Pentru că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, A_n se divide cu 30, rezultă că cel mai mare divizor comun al numerelor $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2005}$ este 30.

Capitolul III

Operații cu numere raționale pozitive

PP Competențe specifice:

C1. Recunoaşterea fracţiilor echivalente, a fracţiilor ireductibile şi a formelor de scriere a unui număr raţional

C2. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raţionale pozitive pentru rezolvarea ecuaţiilor de tipul: $x \pm a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax \pm b = c$, unde a, b, c sunt numere raţionale pozitive

C3. Utilizarea proprietăţilor operaţiilor în efectuarea calculelor cu numere raţionale pozitive

C4. Redactarea soluţiilor unor probleme rezolvate prin ecuaţiile studiate în mulţimea numerelor reale pozitive

C5. Determinarea regulilor de calcul eficiente în efectuarea calculelor cu numere raţionale pozitive

C6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operaţiilor cu numere raţionale pozitive şi a ordinii efectuării operaţiilor

PE-PP 1. Fracţii echivalente; fracţii ireductibile

Definiţie: Se numeşte **fracţie ordinară** o pereche de numere naturale m şi n, cu $n \neq 0$, scrise sub forma $\frac{m}{n}$; m este **numărătorul** fracţiei, iar n este **numitorul** fracţiei.

Observaţie: Fracţia $\frac{m}{n}$ are o interpretare simplă: se împarte un întreg la n părţi egale.

Atunci:

- o parte reprezintă $\frac{1}{n}$;
- m părţi reprezintă $\frac{m}{n}$.

În această situaţie, n părţi reprezintă întregul, adică $\frac{n}{n} = 1$.

Definiţie: Două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt **echivalente**, adică $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă şi numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Exemple:

Fracţiile $\frac{5}{4}$ şi $\frac{15}{12}$ sunt echivalente: $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$ (deoarece $12 \cdot 5 = 4 \cdot 15$).

Fracţiile $\frac{3}{7}$ şi $\frac{6}{8}$ nu sunt echivalente: $\frac{3}{7} \neq \frac{6}{8}$ (deoarece $8 \cdot 3 \neq 7 \cdot 6$).

Observaţie: Prin amplificarea sau simplificarea unei fracţii se obţine o fracţie echivalentă cu fracţia iniţială.

Definiţie: **A amplifica** o fracţie cu un număr natural nenul n înseamnă a înmulţi şi numărătorul, şi numitorul fracţiei cu n.

Observaţie: Se notează $^{n)}\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$.

Exemplu: Prin amplificarea fracţiei $\frac{3}{4}$ cu 2 se obţine fracţia $\frac{6}{8}$. Cele două fracţii, $\frac{3}{4}$ şi $\frac{6}{8}$, sunt echivalente, adică $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, deoarece $8 \cdot 3 = 4 \cdot 6$. Se scrie: $^{2)}\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$.

Definiţie: **A simplifica** o fracţie cu un divizor n, comun numărătorului şi numitorului, înseamnă a împărţi şi numărătorul, şi numitorul fracţiei cu n.

Observaţii:

1. Se notează $\frac{a}{b}^{(n} = \frac{a : n}{b : n}$.
2. O fracţie care nu se mai poate simplifica se numeşte **fracţie ireductibilă**.
3. O fracţie este ireductibilă atunci şi numai atunci când c.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului este 1. În această situaţie, numărătorul şi numitorul sunt **numere prime între ele**. Deci:

$$\frac{a}{b} \text{ este ireductibilă} \Leftrightarrow (a, b) = 1.$$

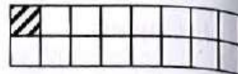
Exemple: $\frac{4}{6}^{(2} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$; $\frac{12}{15}^{(3} = \frac{12:3}{15:3} = \frac{4}{5}$; $\frac{6}{12}^{(6} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2}$.

Deoarece $(5, 9) = 1$, fracţia $\frac{5}{9}$ este ireductibilă.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Partea hașurată din figura alăturată reprezintă $\frac{1}{4}$ dintr-un întreg.



a) Ce fracție reprezintă partea nehașurată?
b) Ce fracție reprezintă desenul?
c) Hașurați un întreg.

2. Mihaela și Mihai desenează fiecare câte un segment cu lungimea de 6 cm.

a) Mihaela împarte segmentul în 6 părți egale și hașurează una dintre cele 6 părți. Ce fracție reprezintă partea hașurată?

b) Mihai împarte segmentul în 3 părți egale și hașurează una dintre cele 3 părți. Ce fracție reprezintă partea hașurată de Mihai?

c) Fiecare copil se folosește de desenul lui și desenează un nou segment. Astfel, Mihaela desenează un segment ce reprezintă fracția $\frac{8}{6}$, iar Mihai desenează un segment ce reprezintă fracția $\frac{4}{3}$. Comparați lungimile segmentelor desenate de copii.

3. Un segment cu lungimea de 0,5 cm reprezintă $\frac{1}{4}$ dintr-un întreg. Calculați lungimea segmentului care reprezintă fracția $\frac{10}{4}$ din acel întreg.

4. Se consideră două fracții echivalente. Aflați $x \in \mathbb{N}$ dacă cele două fracții sunt:

a) $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{x}$; b) $\frac{5}{4}$ și $\frac{x}{16}$; c) $\frac{1}{x}$ și $\frac{3}{27}$; d) $\frac{x}{4}$ și $\frac{7}{7}$.

5. Se consideră fracția $\frac{18}{30}$. Scrieți fracția obținută din aceasta prin:

a) amplificare cu 2; b) amplificare cu 3;
c) simplificare cu 2; d) simplificare cu 3.

6. Se consideră fracția $\frac{60}{385}$.

a) Descompuneți numărătorul și numitorul fracției în factori primi.
b) Arătați că fracția este reductibilă.

PE Aplicare și exersare **

7. Arătați că două fracții, fiecare echivalentă cu o a treia fracție, sunt echivalente între ele.

Rezolvare: Reformulăm problema astfel:

$$\frac{a}{b}=\frac{e}{f} \text{ și } \frac{c}{d}=\frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \ (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N};\ b, d, f \neq 0).$$

Într-adevăr, $\frac{a}{b}=\frac{e}{f} \Rightarrow af = eb$ (1); $\frac{c}{d}=\frac{e}{f} \Rightarrow de = cf$ (2).

Din (1) și (2), înmulțind membru cu membru, rezultă $(af)(de) = (eb)(cf) \Rightarrow (ad)(ef) = (bc)(ef)$.

Deoarece $e \neq 0$ și $f \neq 0$ rezultă $ef \neq 0$. Deci putem să împărțim ultima egalitate prin ef și rezultă

$$ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

8. Determinați fracția $\frac{a}{b}$, știind că este echivalentă cu fracția $\frac{2}{3}$ și $a + b = 10$.

9. Determinați fracția $\frac{a}{b}$, știind că este echivalentă cu fracția $\frac{3}{4}$ și $b - a = 11$.

10. Determinați fracția $\frac{a}{b}$, știind că este echivalentă cu fracția $\frac{7}{5}$ și $a \cdot b = 1\,260$.

11. Determinați x, astfel încât fracțiile $\frac{\overline{x7}}{\overline{1x}}$ și $\frac{9}{4}$ să fie echivalente.

12. Scrieți toate fracțiile cu numitorul divizor al lui 66 echivalente cu fracția $\frac{1}{2}$.

13. Scrieți toate fracțiile cu numărătorul mai mic decât 15 echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$.

14. Scrieți câte trei fracții echivalente cu fracțiile de mai jos:

a) $\frac{1 \cdot 2^2 + 1}{1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1}$; b) $\frac{1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4}{2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 4}$; c) $\frac{1 \cdot 2 + 1}{1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4 + 3}$.

15. Scrieți fracțiile de forma $\frac{\overline{xy}}{\overline{zt}}$ care sunt echivalente cu fracțiile:

a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{11}{37}$; c) $\frac{41}{23}$; d) $\frac{19}{41}$; e) $\frac{12}{5}$.

16. Determinați x, astfel încât fiecare dintre următoarele fracții să fie echivalentă cu fracția $\frac{3}{7}$.

a) $\frac{x}{28}$; b) $\frac{45}{x}$; c) $\frac{2x+1}{21}$; d) $\frac{51}{38+x^2}$.

17. Știind că $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, rezultă $a = 1$ și $b = 2$? Justificați.

18. Determinați x astfel încât $28a = 35b$ și $\frac{a}{b}=\frac{x}{36}$.

19. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$, arătați că $51a = 34b$.

20. Fie $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{N}^*$ cu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ și $c \cdot y = d \cdot x$. Stabiliți dacă $a \cdot y = b \cdot x$.

21. Fie $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{N}^*$ cu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ și $a \cdot y = b \cdot x$. Arătați că $\frac{a}{c+x} = \frac{b}{d+y}$.

22. Determinați numerele naturale x și y, astfel încât fracțiile $\frac{2}{x}$ și $\frac{y+1}{3}$ să fie egale.

23. Aflați numărul natural x care verifică egalitatea: $\frac{15}{x^2+4x}=\frac{5}{4}$.

24. Determinați elementele mulțimilor:

a) $A=\left\{x \,\middle|\, \frac{\overline{1a}}{x}=\frac{1}{2} \text{ și } \overline{1a} \text{ este un număr prim}\right\}$; b) $A=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{119}{\overline{1a4}},\ \overline{1a4} \,\vdots\, 6\right\}$.

25. Aflați numerele naturale x și y, astfel încât fiecare dintre următoarele egalități să fie adevărată:

a) $\frac{^{y)}3}{5}=\frac{x}{10}$; b) $\frac{^{y)}7}{x}=\frac{21}{15}$; c) $\frac{^{y)}x+2}{x+7}=\frac{3x+6}{48}$.

26. Aflați numerele naturale x și y, astfel încât următoarele fracții să formeze un șir de fracții echivalente: $\frac{2}{3}$; $\frac{x+1}{6}$ și $\frac{10}{2y+1}$.

27. Simplificați fracțiile, astfel încât să obțineți fracții ireductibile:

$\frac{20}{30}$; $\frac{250}{350}$; $\frac{2\cdot3\cdot7}{3\cdot7\cdot11}$; $\frac{2^3}{2^5}$; $\frac{2^7\cdot3^2\cdot5^4}{2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot11}$; $\frac{5\ 200}{18\ 200}$; $\frac{1\ 716}{4\ 290}$; $\frac{72a}{108a}$; $\frac{34a+34b}{51a+51b}$.

28. Aflați numerele naturale x și y astfel încât fiecare dintre următoarele egalități să fie adevărată:

a) $\frac{6^{(x}}{8}=\frac{3}{y}$; b) $\frac{x+1^{(y}}{15}=\frac{2}{3}$; c) $\frac{7x+21^{(y}}{x+2}=\frac{x+3}{5}$.

29. Aflați numerele naturale x și y astfel încât următoarele fracții să formeze un șir de fracții echivalente: $\frac{24}{36}$; $\frac{12}{x+2}$ și $\frac{y+1}{6}$.

30. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{375\ 375}{871\ 871}$; b) $\frac{\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}}{\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}}$; c) $\frac{\overline{ab0ab}}{17\ 017}$.

31. Din mulțimea fracțiilor de forma $\frac{\overline{1a7b}}{\overline{c51d}}$, care se simplifică prin 36, aflați-o pe cea mai mică și pe cea mai mare.

PE Aprofundare și performanță ***

32. Arătați că fracția $\frac{7n+10}{5n+7}$ este ireductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare: Presupunem că fracția este reductibilă. Dacă $d=(7n+10, 5n+7)$, atunci $d\neq 1$.

$$\left.\begin{array}{l} d \mid (7n+10) \\ d \mid (5n+7) \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid (7n+10)-(5n+7),$$

deci $d \mid (2n+3)$. Apoi:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 2(2n+3) \\ d \mid 2(5n+7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d \mid (10n+15) \\ d \mid (10n+14) \end{array}\right. \Rightarrow d \mid (10n+15)-(10n+14),$$

de unde $d \mid 1$. Rezultă $d=1$, ceea ce este absurd, deoarece $d\neq 1$.

33. Arătați că fracția $\frac{n}{n+1}$ este ireductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

34. Arătați că fracția $\frac{n}{3n+1}$ este ireductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

35. Arătați că fracția $\frac{4n+3}{6n+4}$ este ireductibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

36. Arătați că fracția $\frac{x^2+x}{2x+4}$ este reductibilă oricare ar fi $x \in \mathbb{N}^*$.

37. Arătați că fracția $\frac{ab(a+b)}{x^2-x+6}$ este reductibilă oricare ar fi $a, b, x \in \mathbb{N}^*$.

38. Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{4n+3}{7n+6}$ este reductibilă.

Rezolvare: Dacă $d=(7n+6, 4n+3)$, atunci:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid (7n+6) \\ d \mid (4n+3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d \mid 4(7n+6) \\ d \mid 7(4n+3) \end{array}\right. \Rightarrow d \mid [(28n+24)-(28n+21)], \text{ deci } d \mid 3. \text{ Rezultă } d \in \{1, 3\}.$$

Dacă $d=3$, atunci din $3 \mid (7n+6)$ rezultă $3 \mid n$, deci $n=3k$, $k \in \mathbb{N}$. Prin urmare, pentru $n=3k$ ($k \in \mathbb{N}$), fracția este reductibilă (poate fi simplificată prin 3). Pentru $n \neq 3k$, fracția este ireductibilă.

39. Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{n+4}{n+6}$ este reductibilă.

PE-PP 2. Aducerea fracțiilor la același numitor

Pentru a aduce două sau mai multe fracții la același numitor se procedează astfel:

- se calculează cel mai mic multiplu comun, care va fi numitorul comun;
- se calculează câtul dintre numitorul comun și numitorul fiecărei fracții;
- se amplifică fiecare fracție cu câtul corespunzător.

Exemple:

1. $\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{3}$; $\left.\begin{array}{l} 4=2^2\cdot1 \\ 3=3\cdot1 \end{array}\right\} \Rightarrow [4, 3]=12;\ 12:4=3;\ 12:3=4$. Deci $\frac{^{3)}3}{4}=\frac{9}{12}$ și $\frac{^{4)}2}{3}=\frac{8}{12}$.

2. $\frac{17}{72}$ și $\frac{13}{60}$; $\left.\begin{array}{l} 72=2^3\cdot3^2 \\ 60=2^2\cdot3\cdot5 \end{array}\right\} \Rightarrow [72, 60]=2^3\cdot3^2\cdot5=360;\ 360:72=5$ și $360:60=6$,

deci $\frac{^{5)}17}{72}=\frac{85}{360}$; $\frac{^{6)}13}{60}=\frac{78}{360}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Se consideră fracțiile: $\frac{2}{15}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{13}{90}$; $\frac{2}{45}$; $\frac{7}{40}$; $\frac{5}{180}$; $\frac{3}{20}$; $\frac{17}{360}$. Amplificați fracțiile astfel încât toate fracțiile rezultate să aibă numitorul 720.

2. Se consideră fracțiile: $\frac{1}{36}; \frac{9}{28}; \frac{4}{56}; \frac{5}{42}$.

a) Aflați c.m.m.m.c. al numitorilor fracțiilor.

b) Aduceți fracțiile la cel mai mic numitor comun.

3. Aflați cel mai mic numitor comun pentru fiecare pereche de fracții:

a) $\frac{3}{5}$ și $\frac{7}{8}$; b) $\frac{5}{16}$ și $\frac{11}{24}$; c) $\frac{1}{18}$ și $\frac{5}{63}$; d) $\frac{7}{11}$ și $\frac{8}{55}$.

4. Aduceți fracțiile la cel mai mic numitor comun:

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$; c) $\frac{8}{9}, \frac{3}{4}$; d) $\frac{3}{1}, \frac{2}{5}$;

e) $\frac{6}{25}, \frac{7}{5}$; f) $\frac{12}{36}, \frac{7}{12}$; g) $\frac{7}{5}, \frac{17}{15}$; h) $\frac{1}{2^2 \cdot 3}, \frac{3}{3^2 \cdot 5}$;

i) $\frac{1}{3^2 \cdot 5}, \frac{3}{2^2 \cdot 5}$; j) $\frac{7}{7^2 \cdot 2}, \frac{1}{3^2 \cdot 7}$.

PE Aplicare și exersare **

5. Aflați cel mai mic numitor comun pentru fracțiile:

a) $\frac{5}{12}, \frac{1}{96}, \frac{7}{48}$; b) $\frac{17}{256}, \frac{1}{64}, \frac{5}{48}$; c) $\frac{6}{5^3 \cdot 7^2}, \frac{13}{35 \cdot 5^2 \cdot 14}, \frac{1}{360}$;

d) $\frac{a}{25}, \frac{b}{150}, \frac{c}{45}$; e) $\frac{5}{3^2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 3^3}, \frac{7}{2^3 \cdot 5^2}$; f) $\frac{3}{655}, \frac{7}{2620}, \frac{1}{1310}$.

6. Aduceți fracțiile la cel mai mic numitor comun:

a) $\frac{50}{20}, \frac{140}{40}$; b) $\frac{135}{170}, \frac{352}{64}$; c) $\frac{500}{400}, \frac{369}{492}$;

d) $\frac{210}{735}, \frac{2185}{665}$; e) $\frac{560}{960}, \frac{1085}{420}, \frac{1196}{624}$; f) $\frac{725}{375}, \frac{1968}{720}, \frac{792}{1080}$.

7. Care dintre următoarele perechi de fracții sunt echivalente?

a) $\frac{1}{7}$ și $\frac{9}{63}$; b) $\frac{6}{22}$ și $\frac{9}{33}$; c) $\frac{8^2}{4^3}$ și $\frac{9^2}{3^4}$; d) $\frac{25}{7}$ și $\frac{5^3}{7^2}$; e) $\frac{51}{17}$ și $\frac{12}{4}$

8. Aflați x astfel încât fracția $\frac{2}{3}$ să fie echivalentă cu fracția:

a) $\frac{x}{12}$; b) $\frac{14}{x}$; c) $\frac{5x}{15}$; d) $\frac{20}{x+5}$; e) $\frac{5x+1}{9}$.

PE Aprofundare și performanță ***

9. Aduceți fracțiile la același numitor:

a) $\frac{5a}{3}, \frac{7a}{2}$ și $\frac{14a}{6}$; b) $\frac{2b}{10}, \frac{3b}{5}$ și $\frac{7b}{50}$; c) $\frac{3}{2c}, \frac{5}{3c}$ și $\frac{7}{4c}$ $(a, b, c \in \mathbb{N}^*)$;

d) $\frac{1}{n}$ și $\frac{1}{2n}$; e) $\frac{1}{4n}$ și $\frac{1}{2n+2}$; f) $\frac{1}{3n}$ și $\frac{1}{4n+4}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

10. Din recolta de pe o suprafață cultivată cu roșii, un legumicultor aduce la piață în prima zi $\frac{2}{5}$, a doua zi $\frac{3}{10}$, iar a treia zi $\frac{4}{15}$.

a) Care este cel mai mic număr de părți egale în care trebuie împărțită întreaga cantitate de roșii pentru a putea compara cantitățile de roșii aduse în cele trei zile la piață?

b) Stabiliți în care din zile cantitatea de roșii adusă la piață a fost cea mai mare.

PE-PP 3. Noțiunea de număr rațional; forme de scriere a unui număr rațional; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

Noțiunea de fracție ordinară și echivalența fracțiilor ordinare permit definirea mulțimii numerelor raționale pozitive $\mathbb{Q}_+$:

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0 \right\}.$$

Definiție: Prin **număr rațional** înțelegem mulțimea tuturor fracțiilor $\frac{m}{n}$ echivalente cu o fracție dată $\frac{a}{b}$ și orice element al mulțimii va fi un reprezentant al numărului rațional.

Exemple: $\frac{1}{2}; \frac{7}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{1}; \frac{5}{9}; \frac{7}{4}$ sunt numere raționale.

Observații:

1. Numărul rațional $\frac{5}{10}$ **este mulțimea tuturor fracțiilor echivalente** cu $\frac{5}{10}$, care este mulțimea $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots \right\}$.

2. Orice element al mulțimii A este **un reprezentant** al numărului rațional $\frac{5}{10}$.

3. Numărul rațional $\frac{a}{b}$ este număr natural dacă și numai dacă a se divide la b ($a \vdots b$).

4. Despre fracțiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$ spunem că sunt **echivalente** și notăm $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, deoarece $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

5. Despre numerele raționale $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$ spunem că sunt **egale** și notăm $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

6. Orice număr rațional se poate scrie ca o **fracție ordinară** sau ca o **fracție zecimală** (finită sau infinită).

Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale

Orice fracție ordinară se transformă în fracție zecimală prin împărțirea numărătorului la numitor. Este recomandat ca înainte de a face împărțirea să se simplifice fracția până devine ireductibilă.

Reguli de transformare a unei fracții ordinare în fracție zecimală

1. Dacă o fracție ordinară ireductibilă are la numitor ca divizori primi doar puteri ale lui 2 și/sau ale lui 5, atunci prin împărțirea numărătorului la numitor se obține o **fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule**; numărul zecimalelor este egal cu maximul dintre exponenții lui 2 și ai lui 5 din descompunerea numitorului.

Exemple: $\frac{3}{5}=0,6$; $\frac{7}{20}=0,35$; $\frac{11}{40}=0,275$.

Observație: Uneori este convenabil să amplificăm fracția pentru a obține o fracție cu numitorul egal cu o putere a lui 10 și atunci scrierea sub formă de fracție zecimală este mult mai simplă.

Exemple: a) $\,^{2)}\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=0,6$;

b) $\frac{7}{20}\overset{5)}{=}\frac{7}{2^2\cdot 5}=\frac{35}{2^2\cdot 5^2}=\frac{35}{10^2}=\frac{35}{100}=0,35$;

c) $\frac{11}{40}\overset{5^2)}{=}\frac{11}{2^3\cdot 5}=\frac{11\cdot 5^2}{2^3\cdot 5^3}=\frac{275}{10^3}=\frac{275}{10^3}=\frac{275}{1000}=0,275$.

2. Dacă o fracție ordinară ireductibilă nu are la numitor ca factori nici pe 2 și nici pe 5, atunci prin împărțirea numărătorului la numitor se obține o **fracție zecimală infinită, numită fracție periodică simplă**.

Exemple: a) $\frac{2}{3}=0,66...6\overset{\text{notată}}{=}0,(6)$;

b) $\frac{17}{9}=1,88...8\overset{\text{notată}}{=}1,(8)$;

c) $\frac{19}{7}=2,714285714285...714285\overset{\text{notată}}{=}2,(714285)$.

3. Dacă o fracție ordinară ireductibilă are la numitor, pe lângă alți factori, și cel puțin unul dintre numerele 2 și/sau 5, atunci prin împărțirea numărătorului la numitor se obține o **fracție zecimală infinită, numită fracție periodică mixtă**.

Exemple: a) $\frac{7}{6}=1,166...6\overset{\text{notată}}{=}0,1(6)$;

b) $\frac{11}{15}=0,733...3\overset{\text{notată}}{=}0,7(3)$;

c) $\frac{37}{22}=1,68181...81\overset{\text{notată}}{=}1,6(81)$.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

1. Fracția zecimală cu un număr finit de zecimale nenule este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător partea zecimală, iar la numitor numărul format din cifra 1 urmată de tot atâtea cifre de 0 câte are partea zecimală.

$$a,a_1a_2\ldots a_n=a\frac{a_1a_2\ldots a_n}{10^n}.$$

Exemple: a) $3,7=\frac{37}{10}$; b) $41,23=41\frac{23}{100}$; c) $1,627=1\frac{627}{1000}$.

2. Fracția zecimală periodică simplă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător perioada, iar la numitor numărul format din tot atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

$$a,(a_1a_2\ldots a_n)=a\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{\underbrace{99\ldots 9}_{n\text{ cifre}}}.$$

Exemple: a) $2,(5)=2\frac{5}{9}$; b) $0,(16)=\frac{16}{99}$; c) $3,(34)=3\frac{34}{99}$.

3. Fracția zecimală periodică mixtă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător diferența dintre numărul fără paranteză situat după virgulă și numărul situat la partea zecimală neperiodică, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte are partea periodică, urmate de atâtea zerouri câte are partea zecimală neperiodică.

$$a,a_1a_2\ldots a_m(b_1b_2\ldots b_n)=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_mb_1b_2\ldots b_n}-\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{\underbrace{99\ldots 9}_{n\text{ cifre}}\underbrace{00\ldots 0}_{m\text{ cifre}}}.$$

Exemple: a) $3,1(6)=3\frac{16-1}{90}=3\frac{15^{(15}}{90}=3\frac{1}{6}$;

b) $1,23(5)=1\frac{235-23}{900}=1\frac{212^{(4}}{900}=1\frac{53}{225}$;

c) $0,2(13)=\frac{213-2}{990}=\frac{211}{990}$.

Partea întreagă a unui număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală este egală cu numărul de întregi, adică cu numărul natural aflat înainte de virgulă.

Partea fracționară a unui număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală se obține din numărul dat înlocuind partea întreagă cu zero (0).

Observații:

1. Se obișnuiește, pentru partea întreagă a numărului notația $[a]$, iar pentru partea fracționară a numărului notația $\{a\}$.

2. Se poate observa că $[a]+\{a\}=a$ și că $0\leq\{a\}<1$.

Exemple: a) $[1,17]=1, \{17\}=0,17$ și $1+0,17=1,17$;

b) $[0,23(4)]=0, \{0,23(4)\}=0,23(4)$ și $0+0,23(4)=0,23(4)$;

c) $[3,1(5)]=3$, $\{3,1(5)\}=0,1(5)$ și $3+0,1(5)=3,1(5)$.

3. Orice număr rațional poate fi scris (reprezentat) ca:

a) fracție ordinară (exemple: $\frac{30}{8};\frac{1}{2};\frac{5}{7}$ etc.);

b) fracție zecimală periodică simplă (exemple: 2,(5); 0,(27) etc.);

c) fracție zecimală periodică mixtă (exemple: 0,08(3); 0,2(5) etc.);

d) fracție zecimală finită (exemple: 0,5; 7,325; 1,175 etc.).

4. Orice număr natural n este un număr rațional: $n=\frac{n}{1}$. În particular: $0=\frac{0}{1}$; $1=\frac{1}{1}$; 0 este **numărul rațional nul**, iar 1 este **numărul rațional unitate**.

5. Un număr rațional $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$) este natural dacă și numai dacă $b \mid a$.

6. Un număr rațional pozitiv și nenul se numește **număr rațional strict pozitiv.** Mulțimea numerelor raționale strict pozitive este: $\mathbb{Q}_{+}^{*} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}^{*}, b \in \mathbb{N}^{*} \right\}$.

7. Oricărui număr rațional strict pozitiv $\frac{a}{b}$ i se asociază un număr rațional strict negativ $-\frac{a}{b}$, numit **opusul numărului rațional** $\frac{a}{b}$.

8. Mulțimea numerelor raționale strict negative este: $\mathbb{Q}_{-}^{*} = \left\{ -\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}^{*}, b \in \mathbb{N}^{*} \right\}$.

9. Oricărui număr rațional nenul $\frac{a}{b}$ i se asociază numărul rațional $\frac{b}{a}$, numit **inversul numărului rațional** $\frac{a}{b}$ și notat $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$. Deci $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

10. Mulțimea numerelor raționale este $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{-}^{*} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_{+}^{*}$.

11. Fie n un număr natural, $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $n = \frac{n}{1}$ și $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}_{+}$, rezultă $n \in \mathbb{Q}_{+}$, adică orice număr natural este număr rațional pozitiv. Deci $\mathbb{N} = \mathbb{Q}_{+}$ și $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, adică mulțimea numerelor naturale este o submulțime a mulțimii numerelor raționale.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Scrieți numărul rațional sub formă zecimală:

a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{3}{100}$; c) $\frac{7}{1000}$; d) $\frac{9}{10\,000}$; e) $\frac{11}{100\,000}$; f) $\frac{17}{1\,000\,000}$.

2. Scrieți numărul rațional sub formă zecimală:

a) $\frac{17}{10}$; b) $\frac{1034}{100}$; c) $\frac{17}{1000}$; d) $\frac{100\,009}{10\,000}$; e) $\frac{54}{10\,000}$.

3. Scrieți numărul rațional sub formă de fracție zecimală periodică simplă:

a) $\frac{17}{9}$; b) $\frac{56}{17}$; c) $\frac{83}{3}$; d) $\frac{100}{27}$; e) $\frac{44}{9}$.

4. Scrieți numărul rațional sub formă de fracție zecimală periodică mixtă:

a) $\frac{17}{6}$; b) $\frac{19}{12}$; c) $\frac{43}{18}$; d) $\frac{263}{15}$; e) $\frac{7}{12}$;

f) $\frac{235}{24}$; g) $\frac{35}{18}$; h) $\frac{137}{72}$; i) $\frac{1005}{36}$; j) $\frac{29}{6}$.

5. Scrieți numărul rațional sub formă de fracție ordinară:

a) 13,2; b) 2,49; c) 1,75; d) 11,003; e) 3,0004;

f) 5,7; g) 4,23; h) 6,125; i) 7,005; j) 9,625.

6. a) Aflați $x \in \mathbb{N}$ pentru care numărul rațional $\frac{18}{2x+1}$ este natural.

b) Aflați $x \in \mathbb{N}$ pentru care $\frac{5}{x+1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

7. Scrieți opusul numărului rațional x, dacă:

a) $x = 5$; b) $x = 5{,}24$; c) $x = 1{,}(03)$; d) $x = 2{,}1(3)$.

8. Scrieți câte 3 exemple de numere raționale strict negative reprezentate prin:

a) fracții ordinare; b) fracții zecimale finite;

c) fracții zecimale periodice simple; d) fracții zecimale periodice mixte.

9. Se consideră numerele raționale: $\frac{10}{14}$; 2,2; 0,(3); 0,3(1). Scrieți inversul fiecăruia sub formă de fracție ordinară ireductibilă.

10. a) Scrieți cinci fracții ordinare și o fracție zecimală finită care să reprezinte același număr rațional.

b) Scrieți cinci fracții ordinare și o fracție zecimală periodică simplă care să reprezinte același număr rațional.

c) Scrieți cinci fracții ordinare și o fracție zecimală periodică mixtă care să reprezinte același număr rațional.

PE Aplicare și exersare **

11. Efectuați transformările cerute conform modelului:

$1{,}(3) = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$2{,}(12) = 2\frac{12}{99} = \frac{^{3)}210}{99} = \frac{70}{33}$	$0{,}(231) = \frac{231}{999} = \frac{77}{333}$
5,(5) =	0,(23) =	12,(021) =
7,(4) =	0,(40) =	0,(235) =

12. Fie mulțimea de fracții: $A = \left\{ \frac{7}{10}, \frac{1}{2}, \frac{17}{13}, \frac{131}{3}, \frac{16}{15}, \frac{263}{15}, \frac{7}{12}, \frac{84}{33} \right\}$. Fără a împărți numărătorul la numitor, aflați numerele raționale din mulțimea A care se reprezintă prin:

a) fracții zecimale finite; b) fracții zecimale periodice simple;

c) fracții zecimale periodice mixte.

13. Efectuați transformările cerute în tabelul următor:

$2{,}1(3) = 2\frac{13-1}{90} = 2\frac{12}{90} = 2\frac{2}{15} = \frac{32}{15}$	$3{,}2(13) = 3\frac{213-2}{990} = 3\frac{211}{990} = \frac{3181}{990}$	$2{,}3(415) = 2\frac{3415-3}{9990} = 2\frac{3412}{9990} = \frac{^{2)}23392}{9990} = \frac{11696}{4995}$
3,2(4) =	4,9(03) =	0,1(235) =
5,3(5) =	3,0(24) =	3,2(417) =

14. Reprezentați sub formă zecimală numărul rațional $\frac{\overline{abcd}}{625 \cdot 2^8 \cdot 5^4}$.

15. Scrieți numărul rațional sub formă de fracție ordinară:

a) $\overline{xy,(z)}$; b) $\overline{x,yz}$; c) $\overline{xy,(zt)}$; d) $\overline{x,y(z)}$.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Determinați numărul natural n astfel încât:

a) $0,27 = \frac{n}{10^3}$; b) $3,523 = \frac{3523}{10^n}$; c) $0,(3) = \frac{4}{n}$.

17. Determinați fracția zecimală care îndeplinește simultan condițiile:

- partea întreagă a acesteia este 2;
- fracția zecimală este periodică simplă cu perioada formată din două cifre;
- a 24-a cifră după virgulă este 3;
- a 35-a cifră după virgulă este 7.

18. Care este suma primelor 50 de cifre de după virgulă ale fracției $\frac{19}{22}$?

19. Aflați a 490-a zecimală a fracției ordinare $\frac{7}{12}$ în scrierea acesteia ca fracție zecimală.

20. Determinați cifra a dacă:

a) $\frac{19}{3} = 6(,a)$; b) $\frac{\overline{(a+1)8}}{12} = 1,5$; c) $\frac{\overline{10a4}}{\overline{a7}} = 37,(925)$;

d) $\overline{a,(a)} = \frac{50}{9}$; e) $\frac{\overline{a(a+1)(a+2)}}{25} = 9,36$.

PE-PP Supermate ****

21. Prin **pătratul** unui număr rațional pozitiv $\frac{m}{n}$ se înțelege numărul rațional $\frac{m^2}{n^2}$.

Demonstrați că pătratul unui număr rațional pozitiv nu poate fi:

a) 2; b) 3; c) 5.

Rezolvare: a) Să presupunem că pătratul numărului rațional pozitiv $\frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, este 2. Aceasta înseamnă că $\frac{m^2}{n^2} = 2$. Putem presupune fracția $\frac{m}{n}$ ireductibilă. În caz contrar, o simplificăm până când devine ireductibilă. Dacă $\frac{m}{n}$ este ireductibilă, atunci $(m, n) = 1$. Deoarece $\frac{m^2}{n^2} = 2$, rezultă $m^2 = 2n^2$, de unde: $2 \mid m^2 \Rightarrow 2 \mid m \Rightarrow m = 2k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Din $m^2 = 2n^2$ rezultă $(2k)^2 = 2n^2$, de unde $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$. Prin urmare $2 \mid m$ și $2 \mid n$, ceea ce nu este adevărat, deoarece $(m, n) = 1$.

22. Demonstrați că fracția zecimală infinită 0,343443444344443444443… nu reprezintă un număr rațional.

Rezolvare: Observăm regula de scriere a fracției: după primul 3 urmează un 4, după al doilea 3 urmează doi de 4 și așa mai departe. Să presupunem că fracția zecimală reprezintă un număr rațional. Fiind infinită, fracția trebuie să fie periodică. Perioada trebuie să conțină cifrele 3 și 4. Numărul cifrelor din perioadă este un număr natural. Să-l notăm cu n. Dar după cea de-a $n+1$ cifră de 3 urmează $n+1$ cifre de 4, deci perioada de n cifre nu mai conține cifra 3, ceea ce nu este adevărat.

23. Dați exemple de fracții zecimale care să nu reprezinte numere raționale și justificați de ce fracțiile zecimale respective nu sunt numere raționale.

24. Demonstrați că fracția ordinară $\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$ se transformă în fracție zecimală periodică mixtă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

25. Determinați cel mai mic număr natural n, astfel încât $\frac{n+4}{2^{n-3} \cdot 5^{2n-15} \cdot 13}$ să fie fracție zecimală neperiodică. Pentru n determinat, aflați valoarea fracției în formă zecimală.

Olimpiada de matematică, Sibiu, 2008

Rezolvare: Pentru ca o fracție ordinară ireductibilă să se poată scrie ca fracție zecimală neperiodică, numitorul acesteia trebuie să conțină în descompunerea sa în factori primi doar puteri ale numărului 2, ale numărului 5 sau produs de puteri ale lui 2 și ale lui 5. Ca urmare, fracția se simplifică prin 13 sau prin numere de forma: $13 \cdot 2^m$, $13 \cdot 5^p$, $13 \cdot 2^q \cdot 5^s$, unde m, p, q și $s \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $(n+4) \vdots 13$ și cum n este cel mai mic număr natural cu această proprietate, rezultă că $n = 9$. Pentru $n = 9$, fracția se scrie: $\frac{9+4}{2^{9-3} \cdot 5^{18-15} \cdot 13} = \frac{13}{2^6 \cdot 5^3 \cdot 13} = \frac{1}{8000} = 0,000125$.

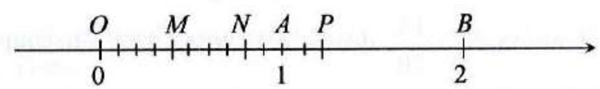
PE-PP 4. Ordonarea numerelor raționale pozitive. Aproximări și rotunjiri

Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor

Pentru a reprezenta pe axa numerelor un număr rațional, exprimat printr-o fracție ordinară $\frac{a}{b}$, împărțim unitatea în b părți egale și luăm a părți dintre acestea.

Pentru a reprezenta pe axa numerelor un număr rațional, exprimat printr-o fracție zecimală, se împart segmentele determinate de diviziunile corespunzătoare a două numere naturale consecutive în zece segmente de lungimi egale. După aceea, fiecare din segmentele obținute (adică o zecime) se împarte în câte alte zece segmente egale, o astfel de diviziune reprezentând o sutime. Procedeul poate continua obținând miimile, zecimile de miimi și așa mai departe.

Exemplu:



În figura alăturată, punctul O are coordonata 0 și reprezintă originea axei numerelor. Punctul A are coordonata 1 și punctul B are coordonata 2. Punctul M are coordonata $0,4 = \frac{4}{10}$. Unitatea de măsură a fost împărțită în 10 părți și am luat 4 (am reprezentat patru zecimi) sau având în vedere că fracția $\frac{4}{10}$ este echivalentă cu fracția $\frac{2}{5}$ prin simplificare și ele reprezintă același număr rațional, putem să împărțim unitatea de măsură în 5 părți și să luăm 2. Am văzut astfel că și în reprezentarea pe axă fracțiile $\frac{2}{5}$ și

$\frac{4}{10}$ sunt reprezentante ale aceluiaşi număr raţional.

Asemănător am procedat şi am reprezentat pe axă punctul N de coordonată 0,8 sau $\frac{8}{10}$ sau $\frac{4}{5}$ şi punctul P de coordonată 1,4 sau $\frac{14}{10}$ sau $\frac{7}{5}$.

Compararea numerelor raţionale prin reprezentarea pe axa numerelor

Analizând cu atenţie axa numerelor putem observa că $d(M; 0) < d(N; 0) < d(P; 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0{,}4 < 0{,}8 < 1{,}4$ sau echivalent cu $\frac{4}{10} < \frac{8}{10} < \frac{14}{10}$ sau echivalent cu $\frac{2}{5} < \frac{4}{5} < \frac{7}{5}$. Spunem în acest caz că am comparat numerele raţionale 0,4; 0,8 şi 1,4 reprezentându-le pe axa numerelor.

Observaţie: Pentru a compara două numere raţionale, fără a fi reprezentate pe o axă a numerelor, ele trebuie să fie exprimate prin fracţii de acelaşi tip (ordinare sau zecimale).

Compararea numerelor raţionale exprimate prin fracţii ordinare

Pentru a compara numerele raţionale $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ se compară produsele $a \cdot d$ şi $b \cdot c$ şi pot să apară următoarele situaţii:

a) Dacă $a \cdot d < b \cdot c$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Exemplu: $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$, deoarece $3 \cdot 7 < 5 \cdot 5$, adică $21 < 25$.

b) Dacă $a \cdot d > b \cdot c$, atunci $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Exemplu: $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, deoarece $2 \cdot 2 > 3 \cdot 1$, adică $4 > 3$.

c) Dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemplu: $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, deoarece $3 \cdot 20 = 5 \cdot 12$, adică $60 = 60$.

Observaţii: Pentru a compara numere raţionale exprimate prin fracţii ordinare mai putem folosi şi regulile învăţate în clasa a V-a, şi anume:

1. Dintre două fracţii cu acelaşi numărător, mai mică este fracţia cu numitorul mai mare.

Exemplu: $\frac{7}{5} < \frac{7}{2}$, deoarece au acelaşi numărător şi $5 > 2$.

2. Dintre două fracţii cu acelaşi numitor, mai mică este fracţia cu numărătorul mai mic.

Exemplu: $\frac{2}{11} < \frac{3}{11}$, deoarece au acelaşi numitor şi $2 < 3$.

3. Dacă fracţiile nu au nici acelaşi numitor, nici acelaşi numărător, le aducem la acelaşi numitor sau la acelaşi numărător şi apoi aplicăm regulile anterioare.

Compararea numerelor raţionale exprimate prin fracţii zecimale

- Dacă numerele raţionale sunt reprezentate prin fracţii zecimale, le vom compara aşa cum am învăţat în clasa a V-a:

– comparăm părţile întregi;

– dacă sunt egale, comparăm numerele naturale „corespunzătoare” părţilor zecimale.

Exemple: $17{,}4957 < 21{,}632$, deoarece $17 < 21$; $24{,}45 < 24{,}47$, deoarece $45 < 47$; $31{,}2 < 31{,}25$, deoarece $20 < 25$; $0{,}02 < 0{,}02314$, deoarece $2000 < 2314$; $3{,}11(2) < 3{,}1(2)$, deoarece $1122 < 1222$.

- Oricare ar fi două numere raţionale pozitive:

$$x < y \text{ sau } x = y \text{ sau } y < x,$$

se defineşte relaţia de ordine „≤” (mai mic sau egal) astfel:

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ sau } x = y.$$

- Relaţia de ordine „≤” are următoarele proprietăţi: este **reflexivă**, **tranzitivă** şi **antisimetrică**, adică, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$:

1) $x \leq x$ (reflexivitate);
2) $x \leq y$ şi $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivitate);
3) $x \leq y$ şi $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie).

Aproximări şi rotunjiri

În viaţa cotidiană, numerele raţionale sunt utilizate frecvent, ele fiind reprezentate, de regulă, prin fracţii zecimale, folosindu-se **aproximările** şi **rotunjirile**.

Exemplu: Pentru numărul raţional 14,513 avem: $14 < 14{,}513 < 15$. Se spune că 14 **aproximează** numărul 14,513 **cu o unitate prin lipsă** şi 15 **aproximează cu o unitate prin adaos.**

Deoarece $14{,}5 < 14{,}513 < 14{,}6$, se spune că 14,5 **aproximează** pe 14,513 **cu o zecime prin lipsă**, iar 14,6 îl **aproximează cu o zecime prin adaos.**

Deoarece $14{,}51 < 14{,}513 < 14{,}52$, se spune că 14,51 **aproximează** pe 14,513 **cu o sutime prin lipsă**, iar 14,52 îl **aproximează cu o sutime prin adaos.**

Un număr raţional reprezentat printr-o fracţie zecimală poate fi aproximat, prin lipsă sau prin adaos, la unităţi, zecimi, sutimi, miimi etc.

Definiţie: Aproximarea prin lipsă la zecimi (respectiv sutimi, miimi etc.) se mai numeşte **aproximare cu o zecimală exactă** (respectiv cu două, trei etc. zecimale exacte).

Definiţie: **Rotunjirea** unui număr raţional reprezentat printr-o fracţie zecimală **la zecimi** (respectiv sutimi, miimi etc.) este:

a) **aproximarea prin lipsă la zecimi** (respectiv sutimi, miimi etc.) dacă cifra sutimilor (respectiv miimilor, zecimilor de miimi etc.) este 0, 1, 2, 3 sau 4;

b) **aproximarea prin adaos la zecimi** (respectiv sutimi, miimi etc.) dacă cifra sutimilor (respectiv miimilor, zecimilor de miimi etc.) este 5, 6, 7, 8 sau 9.

Exemple:

1. Pentru a rotunji la zecimi numărul raţional 3,245, privim cifra sutimilor, care este 4. Rezultă că rotunjirea la zecimi a lui 3,245 este aproximarea prin lipsă la zecimi a acestui număr, adică 3,2.

2. Pentru a rotunji la sutimi numărul raţional 3,245, privim cifra miimilor, care este 5. Rezultă că rotunjirea la miimi a lui 3,245 este aproximarea prin adaos la sutimi a acestui număr, adică 3,25.

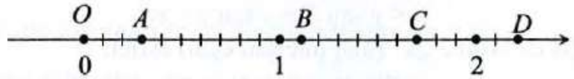
● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Studiați cu atenție axa numerelor din figura de mai jos.

a) Scrieți sub formă de fracție zecimală coordonatele punctelor A, B, C, D din figura de mai jos.

b) Scrieți sub formă de fracție ordinară coordonatele punctelor A, B, C, D din figura de mai jos.



2. Luați o unitate de măsură convenabilă și reprezentați pe axa numerelor următoarele numere raționale: $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{7}{5},\ \frac{5}{2}$.

3. Reprezentați pe o axă următoarele numere raționale:

0; 1; 0,3; 0,7; 0,8; 1,2; 1,5; 2.

4. Ordonați crescător numerele raționale:

0,21; 0,(21); 0,201; 0,2(1); 0,2(10).

5. Ordonați descrescător numerele raționale:

25,2; 25,08; 12(1); 1,052; 10,52; 1,1(09); 0,8; 0,09; 0,1.

6. Copiați și completați tabelul următor (ultimul rând este completat ca model):

Numărul	Aproximare la:	Prin lipsă	Prin adaos
5,24	unități		
7,1(3)	zecimi		
7,1(3)	sutimi		
7,1(3)	miimi		
5,4(16)	zecimi de miimi	5,4161	5,4162

7. Copiați și completați tabelul următor (ultimul rând este completat ca model):

Rotunjire la:	Numărul	Rotunjirea	Numărul	Rotunjirea
unități	5,24		3,75	
zecimi	7,1(3)		3,761	
sutimi	13,2(7)		3,7592	
miimi	13,2(4)		5,48631	
zecimi de miimi	5,4(86)	5,4869	5,48631	5,4863

8. Scrieți trei numere raționale reprezentate prin fracții zecimale:

a) mai mari decât 41,37;

b) mai mici decât 0,012;

c) cuprinse între 7 și 8 (mai mari decât 7, dar mai mici decât 8);

d) cuprinse între 14,36 și 14,37;

e) mai mari decât 4,6 și cu partea întreagă mai mică decât 5.

9. Ordonați crescător numerele raționale: $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\frac{8}{7},\frac{9}{8},\frac{10}{9},\frac{11}{10}$.

Indicație: Scrieți numerele raționale sub formă de fracții zecimale.

10. Fie numerele raționale: $\frac{7}{11},\frac{14}{33},\frac{3}{22},\frac{11}{21},\frac{2}{7},\frac{4}{13},\frac{1}{18},\frac{27}{14}$.

a) Scrieți fiecare număr rațional cu două zecimale exacte, altfel spus: aproximați prin lipsă la sutimi fiecare număr rațional.

b) Aproximați prin adaos la sutimi fiecare număr rațional.

c) Rotunjiți la zecimi fiecare număr rațional.

PE Aplicare și exersare **

11. Ordonați crescător șirul de numere raționale:

a) $\frac{4}{5},\frac{6}{7},\frac{9}{11},\frac{12}{13}$; b) $\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},\frac{11}{12}$; c) $\frac{17}{34},\frac{13}{39},\frac{45}{18},\frac{21}{14},\frac{6}{30}$.

Indicație: a) Aducem la același numărător și comparăm numitorii; b) Aducem la același numitor și comparăm numărătorii; c) Scriem numerele raționale ca fracții ireductibile.

12. a) Demonstrați că dacă $m, p, q \in \mathbb{N}^*$, atunci: $\frac{m}{p}<\frac{m}{q} \Leftrightarrow q<p$.

b) Ordonați crescător numerele:

1) $\frac{1}{17},\frac{1}{25},\frac{1}{49},\frac{1}{13}$; 2) $\frac{11}{15},\frac{11}{20},\frac{11}{12},\frac{11}{19}$; 3) $\frac{5}{27},\frac{1}{39},\frac{10}{48},\frac{15}{45}$.

Rezolvare: a) $\frac{m}{p}<\frac{m}{q} \Leftrightarrow mq<mp \mid : m\neq 0 \Leftrightarrow q<p$; b) 3) Reprezentăm numerele raționale prin fracții ireductibile corespunzătoare: $\frac{10^{(2}}{48}=\frac{5}{24}$; $\frac{15^{(5}}{45}=\frac{3^{(3}}{9}=\frac{1}{3}$. Avem de comparat numerele raționale $\frac{5}{27},\frac{1}{39},\frac{5}{24},\frac{1}{3}$. Aducând la același numărător, obținem fracțiile: $\frac{5}{27},\frac{5}{195},\frac{5}{24},\frac{5}{15}$. Comparând numitorii rezultă $15<24<27<195$. Aplicând rezultatul de la punctul a), rezultă: $\frac{5}{195}<\frac{5}{27}<\frac{5}{24}<\frac{5}{15}$, deci $\frac{1}{39}<\frac{5}{27}<\frac{10}{48}<\frac{15}{45}$.

13. a) Demonstrați că dacă $p, q, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\frac{p}{n}<\frac{q}{n} \Leftrightarrow p<q$.

b) Ordonați crescător numerele raționale: 1) $\frac{17}{5},\frac{19}{5},\frac{11}{5},\frac{3}{5}$; 2) $\frac{27}{2},\frac{55}{6},\frac{25}{3},\frac{13}{4}$.

14. Demonstrați că $\frac{5}{6}<\frac{31}{36}$:

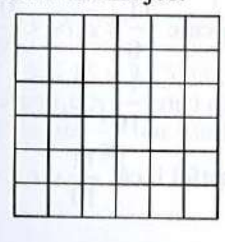
a) aducând fracțiile la același numitor;

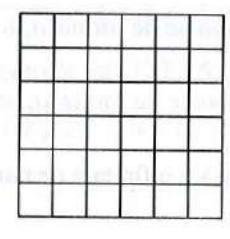
b) aducând fracțiile la același numărător;

c) folosind regula de comparare a numerelor raționale scrise sub formă de fracții ordinare;

d) reprezentând numerele raționale sub formă de fracții zecimale;

e) folosind desenul de mai jos.





15. Scrieți partea întreagă și partea fracționară a următoarelor numere raționale:

$$\frac{3}{5};\ \frac{7}{2};\ 1,3(6);\ 2,1(6);\ 12,35.$$

PE Aprofundare și performanță ***

16. Aflați numerele naturale x și y, știind că $\frac{3}{5} < \frac{7}{x} < \frac{9}{4} < \frac{5}{y} < \frac{16}{x+y}$.

17. Determinați $n \in \mathbb{N}$ dacă $x \in \mathbb{Q}_+$, $n \le x < n+1$ și x este:

a) $3,14$; b) $9,08$; c) $1,(1)$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{136}{2}$;

f) $\frac{132}{25}$; g) $\frac{415}{16}$; h) $\frac{1321}{100}$; i) $\frac{169}{33}$; j) $\frac{1207}{165}$.

18. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a) $\frac{189}{441} < \ldots\ldots < \frac{245}{441}$; b) $\frac{27}{63} < \ldots\ldots < \frac{35}{63}$

19. a) Dați exemplu de trei fracții ireductibile cu valoarea cuprinsă între $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{2}$.

b) Câte fracții ireductibile au valoarea cuprinsă între $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{2}$?

c) Cum putem determina fracții ireductibile care au valoarea cuprinsă între $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{2}$?

20. Determinați numărul natural n pentru care au loc inegalitățile:

a) $\frac{n}{2} < \frac{5}{3}$; b) $\frac{2}{n+1} > \frac{3}{7}$; c) $\frac{3}{4} > \frac{n+2}{11}$; d) $\frac{5}{6} < \frac{4}{2n+1}$.

PE-PP Supermate ****

21. Se consideră numărul natural nenul n, cifrele a, b, c, d și numărul rațional $\frac{n+1}{n}$.

a) Demonstrați că $1 < \frac{n+1}{n} \le 2$.

b) Enumerați elementele mulțimii $M = \left\{\frac{n+1}{n} \middle| n \in \{1, 2, \ldots, 10\}\right\}$.

c) Ordonați crescător elementele mulțimii M.

d) Arătați că nu există numere raționale de forma $\overline{a,b}$ astfel încât $\frac{11}{10} < \overline{a,b} < \frac{10}{9}$.

e) Aflați numerele raționale de forma $\overline{a,bc}$ pentru care $\frac{11}{10} < \overline{a,bc} < \frac{10}{9}$.

f) Aflați numerele raționale de forma $\overline{a,bcd}$ pentru care $\frac{11}{10} < \overline{a,bcd} < \frac{10}{9}$.

g) Demonstrați că există o infinitate de numere r astfel încât $\frac{11}{10} < r < \frac{10}{9}$.

Rezolvare: f) Deoarece $\frac{11}{10} = 1,1$ și $\frac{10}{9} = 1,(1)$, iar $1,(1) < 1,112$, atunci $\frac{11}{10} < \overline{a,bcd} < \frac{10}{9} \Rightarrow$ $\Rightarrow 1,1 < \overline{a,bcd} < 1,112$. Înmulțind cu 1000, rezultă $1100 < \overline{abcd} < 1112 \Rightarrow \overline{abcd} \in \{1101, 1102, \ldots, 1111\}$, deci numerele raționale căutate sunt: 1,101; 1,102; 1,103; ...; 1,111;

g) Deoarece pentru orice număr natural $1,1 < 1,1\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ cifre}}1 < 1,(1)$, rezultă că există o infinitate de numere raționale cu proprietatea din enunț.

22. Aflați numerele raționale de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, știind că $\frac{1}{9} < \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} < \frac{1}{8}$.

23. Fie x un număr natural și numărul rațional $r = \frac{120}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$. Aflați x în fiecare din următoarele situații:

a) numărul rațional r este definit, altfel spus fracția care îl reprezintă este definită (are sens);

b) $r = 1$; c) $r > 1$; d) $r < 1$.

PE-PP 5. Adunarea și scăderea numerelor raționale pozitive

Adunarea și scăderea numerelor raționale pozitive exprimate prin fracții cu același numitor

Pentru a aduna sau scădea două numere raționale pozitive reprezentate prin fracții ordinare cu același numitor se adună respectiv se scad numărătorii și se păstrează numitorul comun:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{N} \text{ și } n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{N}, \text{ cu } a \ge b \text{ și } n \in \mathbb{N}^*.$$

Adunarea și scăderea numerelor raționale pozitive exprimate prin fracții cu numitori diferiți

Pentru a aduna sau scădea două numere raționale pozitive reprezentate prin fracții ordinare care au numitorii diferiți se aduc mai întâi fracțiile la același numitor și apoi se aplică regula de adunare respectiv scădere de mai sus.

Pentru a aduce fracțiile la același numitor se parcurg următoarele etape:

- Se calculează cel mai mic multiplu comun al numitorilor, care va fi și numitorul comun.
- Se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre numitorul comun determinat și numitorul fracției respective.

Exemplu: Pentru a calcula suma $\frac{17}{20} + \frac{7}{15}$ se procedează astfel:

- Cum $20 = 2^2 \cdot 5$ și $15 = 3 \cdot 5$, numitorul comun este $[20, 15] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
- Se amplifică fracția $\frac{17}{20}$ cu câtul dintre 60 și 20, adică cu 3, și se obține $^{3)}\frac{17}{20} = \frac{51}{60}$.

Se amplifică şi fracţia $\frac{7}{15}$ cu câtul dintre 60 şi 15, adică cu 4, şi se obţine $^{4)}\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$.

• **Suma** numerelor $\frac{17}{20}$ şi $\frac{7}{15}$ este $\frac{51}{60}+\frac{28}{60}=\frac{79}{60}$ şi respectiv **diferenţa** numerelor $\frac{17}{20}$ şi $\frac{7}{15}$ este $\frac{51}{60}-\frac{28}{60}=\frac{23}{60}$ sau altfel spus $^{3)}\frac{17}{20}+{}^{4)}\frac{7}{15}=\frac{51}{60}+\frac{28}{60}=\frac{79}{60}$ şi respectiv $^{3)}\frac{17}{20}-{}^{4)}\frac{7}{15}=\frac{51}{60}-\frac{28}{60}=\frac{23}{60}$.

Observaţii:

1. Dacă fracţiile care se adună sau se scad nu sunt ireductibile, este preferabil să se simplifice până devin ireductibile şi apoi să se aducă la acelaşi numitor.
2. Rezultatul adunării sau scăderii trebuie, de asemenea, să fie exprimat printr-o fracţie ireductibilă.

Exemplu: Pentru a aduna sau scădea fracţiile $\frac{616}{924}$ şi $\frac{108}{180}$, mai întâi le simplificăm până devin ireductibile şi apoi le aducem la acelaşi numitor. Cum $\frac{616}{924}^{(11}=\frac{56}{84}^{(7}=\frac{8}{12}^{(4}=\frac{2}{3}$ şi $\frac{108}{180}^{(4}=\frac{27}{45}^{(9}=\frac{3}{5}$ avem că $^{5)}\frac{2}{3}+{}^{3)}\frac{3}{5}=\frac{10}{15}+\frac{9}{15}=\frac{19}{15}$ şi $^{5)}\frac{2}{3}-{}^{3)}\frac{3}{5}=\frac{10}{15}-\frac{9}{15}=\frac{1}{15}$.

Adunarea şi scăderea numerelor raţionale pozitive exprimate prin fracţii zecimale finite

Pentru a aduna sau scădea două numere raţionale pozitive reprezentate prin fracţii zecimale finite se scriu unul sub celălalt, astfel încât cifrele de pe poziţiile de acelaşi ordin să fie scrise unele sub altele. Altfel spus, se scrie partea întreagă sub partea întreagă, virgula sub virgulă, zecimile sub zecimi, sutimile sub sutimi şi aşa mai departe.

Dacă fracţiile au un număr diferit de zecimale, atunci se completează cu zerouri scrise după ultima cifră, astfel încât să se adune sau să se scadă fracţii cu acelaşi număr de cifre după virgulă.

Exemplu: Pentru a calcula suma 4,23 + 2,456 se completează cu zerouri pentru ca părţile zecimale să conţină acelaşi număr de cifre, apoi se adună şi se pune virgula sub virgulă la rezultat. Asemănător se procedează şi la scădere.

$$\begin{array}{r} 4,230+\\ \underline{2,456}\\ 6,686 \end{array} \quad \text{şi} \quad \begin{array}{r} 4,230-\\ \underline{2,456}\\ 1,774 \end{array}$$

Se obţine 4,23 + 2,456 = 6,686 şi 4,23 − 2,456 = 1,774.

Adunarea şi scăderea numerelor raţionale pozitive exprimate prin fracţii zecimale periodice

Pentru a aduna sau scădea numere raţionale pozitive reprezentate prin fracţii zecimale periodice, se transformă fracţiile periodice în fracţii ordinare ireductibile şi apoi se aplică regula de adunare sau de scădere a numerelor raţionale reprezentate prin fracţii ordinare.

Exemplu: $0,6(5)+0,(3)=\frac{65-6}{90}+\frac{3}{9}=\frac{59}{90}+{}^{10)}\frac{3}{9}=\frac{59}{90}+\frac{30}{90}=\frac{89}{90}$;

$0,6(5)-0,(3)=\frac{65-6}{90}-\frac{3}{9}=\frac{59}{90}-{}^{10)}\frac{3}{9}=\frac{59-30}{90}=\frac{29}{90}$.

Adunarea şi scăderea numerelor raţionale pozitive exprimate prin fracţii de tipuri diferite

Pentru a aduna sau scădea numere raţionale pozitive reprezentate prin fracţii de diferite tipuri trebuie să se transforme mai întâi fracţiile în fracţii de acelaşi tip, fie zecimale, fie ordinare, şi apoi se folosesc regulile enunţate anterior.

Exemplu: $0,5+\frac{1}{4}=0,5+0,25=0,75$ şi $0,5-\frac{1}{4}=0,5-0,25=0,25$ sau

$0,5+\frac{1}{4}=\frac{5}{10}^{(5}+\frac{1}{4}={}^{2)}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ şi

$0,5-\frac{1}{4}=\frac{5}{10}^{(5}-\frac{1}{4}={}^{2)}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Se poate constata că dacă unul dintre numere este reprezentat de o fracţie periodică, atunci se reprezintă toate numerele prin fracţii ordinare şi apoi se aplică regulile.

Exemplu: $\frac{1}{2}+0,1(6)=\frac{1}{2}+\frac{16-1}{90}=\frac{1}{2}+\frac{15}{90}^{(15}={}^{3)}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}^{(2}=\frac{2}{3}$ şi

$\frac{1}{2}-0,1(6)=\frac{1}{2}-\frac{16-1}{90}=\frac{1}{2}-\frac{15}{90}^{(15}={}^{3)}\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}^{(2}=\frac{1}{3}$.

Observaţii:

1. Dacă p, q şi s sunt numere raţionale pozitive, în scrierea $p+q=s$, numărul s este **suma** numerelor raţionale p şi q, iar numerele raţionale p şi q sunt **termenii sumei**. Analog, dacă p, q şi d sunt numere raţionale pozitive, în scrierea $p-q=d$ numărul d este **diferenţa** numerelor raţionale p şi q. Numărul p se numeşte **descăzut**, iar q se numeşte **scăzător**.
2. Operaţia prin care la două numere raţionale pozitive se asociază suma lor se numeşte **adunarea numerelor raţionale**, iar operaţia prin care la două numere raţionale se asociază diferenţa lor se numeşte **scăderea numerelor raţionale**.
3. Egalităţile următoare: $p+q=s$; $p=s-q$; $q=s-p$ sunt echivalente.

SCOATEREA ÎNTREGILOR DIN FRACŢIE. INTRODUCEREA ÎNTREGILOR ÎN FRACŢIE

Fie un număr raţional pozitiv reprezentat prin fracţia $\frac{a}{b}$. Aplicând teorema împărţirii cu rest rezultă $a=b\cdot c+r$, unde c este **câtul**, iar r este **restul** împărţirii lui a la b. Atunci:

$$\frac{a}{b}=\frac{b\cdot c+r}{b}=\frac{b\cdot c}{b}+\frac{r}{b}=c+\frac{r}{b}.$$

Deci $\frac{a}{b}=c+\frac{r}{b}$ (citim „c întregi şi $\frac{r}{b}$" şi notăm $c\frac{r}{b}$).

• dacă scriem $\frac{a}{b}=c\frac{r}{b}$, spunem că **am scos întregii din fracţie**;

• dacă scriem $c\frac{r}{b}=\frac{a}{b}$, spunem că **am introdus întregii în fracție.**

Exemple: 1. $\frac{25}{4}=6+\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}$; 2. $8\frac{3}{7}=\frac{7\cdot 8+3}{7}=\frac{56+3}{7}=\frac{59}{7}$.

Observație: În scrierea $\frac{a}{b}=c\frac{r}{b}$, unde $r<b$, c este **partea întreagă** a numărului rațional $\frac{a}{b}$, iar $\frac{r}{b}$ este **partea fracționară** a acestuia. Notăm

$$c=\left[\frac{a}{b}\right];\ \frac{r}{b}=\left\{\frac{a}{b}\right\}.$$

Exemplu:

Dacă $x\in\mathbb{Q}_+$ și $x=\frac{17}{6}$, atunci $x=2{,}8(3)$ sau $x=2\frac{5}{6}\Rightarrow[x]=2$ și $\{x\}=\frac{5}{6}=0{,}8(3)$.

PROPRIETĂȚILE ADUNĂRII NUMERELOR RAȚIONALE

Adunarea numerelor raționale are următoarele proprietăți:

1. oricare ar fi p și q numere raționale, $p+q$ este un număr rațional;
2. este **comutativă**, adică oricare ar fi numerele raționale p și q, $p+q=q+p$;
3. numărul rațional nul este **elementul neutru** la adunare, adică oricare ar fi numărul rațional p,
$$p+0=0+p=p;$$
4. orice număr rațional p are un **opus**, $-p$, și
$$p+(-p)=(-p)+p=0;$$
5. este **asociativă**, adică oricare ar fi numerele raționale p, q și r,
$$(p+q)+r=p+(q+r).$$

Observații:

1. Existența opusului oricărui număr rațional permite definirea diferenței a două numere raționale p și q oarecare, astfel:
$$p-q=p+(-q),$$
adică diferența $p-q$ este suma lui p cu opusul lui q.

2. Foarte utile sunt și următoarele reguli de calcul.
Oricare ar fi p, q, s și r numere raționale, avem:
a) Dacă $p=q$, atunci $p+s=q+s$.
b) Dacă $p<q$, atunci $p+s<q+s$.
c) Dacă $p=q$ și $s=r$, atunci $p+s=q+r$.
d) Dacă $p<q$ și $s<r$, atunci $p+s<q\pm r$.

Proprietatea a) exprimă faptul că adunând un număr rațional pozitiv în ambii membri ai unei egalități, egalitatea se păstrează.

Proprietatea b) exprimă faptul că adunând un număr rațional pozitiv la ambii membri ai unei inegalități, inegalitatea se păstrează.

Proprietatea c) exprimă faptul că adunând două egalități termen cu termen, egalitatea se păstrează.

Proprietatea d) exprimă faptul că prin adunarea termen cu termen a două inegalități de **același sens**, inegalitatea se păstrează.

Estimarea unei sume

În anumite situații este util să evaluăm ordinul de mărime al unei sume, fără a efectua adunarea. O metodă de estimare a ordinului de mărime al unei sume este **rotunjirea fiecărui termen** al sumei la un anumit ordin de mărime.

Asemănător se procedează și pentru **estimarea unei diferențe.**

Exemple: a) Se consideră suma $S=7{,}451+0{,}62+4{,}1(6)$. Pentru a **estima suma la ordinul unităților**, se va rotunji fiecare termen al sumei la unități după regulile cunoscute. Se obține $S=7+1+4=12$. Pentru a **estima suma la ordinul zecimilor**, se va rotunji fiecare termen al sumei la zecimi după regulile cunoscute. Se obține $S=7{,}5+0{,}6+4{,}2=12{,}3$.

b) Se consideră diferența $D=7{,}451-4{,}1(6)$. Pentru a **estima diferența la ordinul unităților**, se va rotunji fiecare termen la unități după regulile cunoscute. Se obține $D=7-4=3$. Pentru a **estima diferența la ordinul zecimilor**, se va rotunji fiecare termen la zecimi după regulile cunoscute. Se obține $D=7{,}5-4{,}2=3{,}3$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{3}{11}+\frac{5}{11}$; b) $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}$; c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}$; d) $\frac{16}{93}+\frac{50}{93}$;
e) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$; f) $\frac{3}{6}+\frac{14}{6}+\frac{13}{6}$; g) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$; h) $\frac{1}{63}+\frac{5}{63}+\frac{3}{63}$;
i) $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$; j) $\frac{13}{9}-\frac{7}{9}$; k) $\frac{17}{27}-\frac{11}{27}$; l) $\frac{35}{63}-\frac{14}{63}$;
m) $\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{7}{3\cdot 2^2}+\frac{5}{3\cdot 2^2}+\frac{3}{3\cdot 2^2}$; n) $\frac{1}{3^2\cdot 5\cdot 7}+\frac{4}{3^2\cdot 5\cdot 7}+\frac{2}{3^2\cdot 5\cdot 7}$.

2. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{9}+\frac{3}{7}$; c) $\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$; d) $\frac{3}{8}+\frac{13}{117}$;
e) $\frac{1}{5}+\frac{7}{15}+\frac{5}{8}$; f) $\frac{1}{4}+\frac{7}{24}+\frac{5}{8}$; g) $3+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$; h) $\frac{3}{11}+\frac{4}{3}+\frac{7}{12}$;
i) $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$; j) $\frac{7}{20}-\frac{5}{18}$; k) $\frac{8}{13}-\frac{5}{39}$; l) $3-\frac{2}{5}$.

3. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție zecimală:

a) $4{,}52+7{,}215$; b) $156{,}72+461{,}5$; c) $0{,}0135+0{,}023$;
d) $97{,}328-54{,}23$; e) $218{,}4-193{,}375$; f) $197{,}9-43$.

4. Calculați, apoi scrieți rezultatul sub formă de fracție zecimală:

a) $0{,}(2)+0{,}(5)$; b) $7{,}(3)+2{,}(13)$; c) $0{,}1(2)+5{,}(4)$;
d) $5{,}(6)-2{,}(8)$; e) $3{,}(43)-1{,}(5)$; f) $12{,}1(5)-3{,}(4)$.

5. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție zecimală:

a) $0{,}58(3)+\frac{4}{25}+0{,}625+0{,}0208(3)$; b) $0{,}4(6)+0{,}05+\frac{3}{180}+0{,}1(2)+\frac{5}{60}$.

6. Scoateți întregii din fracție:

a) $\frac{11}{4}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $\frac{11}{8}$; d) $\frac{20}{12}$; e) $\frac{5}{2}$; f) $\frac{18}{5}$;

g) $\frac{13}{7}$; h) $\frac{96}{24}$; i) $\frac{86}{21}$; j) $\frac{123}{17}$; k) $\frac{635}{81}$; l) $\frac{4327}{29}$.

7. Introduceți întregii în fracție:

a) $3\frac{2}{5}$; b) $1\frac{4}{7}$; c) $3\frac{1}{6}$; d) $17\frac{1}{15}$; e) $29\frac{17}{23}$; f) $8\frac{9}{48}$.

8. Calculați:

a) $5\frac{1}{4}+6\frac{1}{10}$; b) $6\frac{1}{4}+5\frac{2}{3}+1\frac{17}{24}$; c) $4\frac{5}{6}-2\frac{1}{4}$; d) $4\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}$;

e) $5,(6)-4\frac{1}{3}$; f) $13,(6)+5,8(3)-14\frac{7}{9}$; g) $5,(6)-2\frac{8}{9}$.

9. Calculați $[x]$ și $\{x\}$, dacă x este:

a) $3\frac{2}{7}$; b) $5\frac{1}{3}$; c) $14\frac{15}{7}$; d) $13\frac{97}{150}$; e) $11\frac{133}{49}$; f) $2\frac{0}{8}$;

g) 2,14; h) 2,3(14); i) 9,(3); j) $\frac{15}{7}$; k) $\frac{239}{15}$.

10. Copiați tabelul și completați:

a	b	c	$a+b$	$b+c$	$(a+b)+c$	$a+(b+c)$	$a+b+c$
$\frac{3}{24}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{72}$					
$\frac{2}{21}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{7}$					

PE Aplicare și exersare **

11. Efectuați:

a) $\frac{1}{3\cdot 7^2}+\frac{5}{3^2\cdot 7}$; b) $\frac{5}{7^2\cdot 11}+\frac{4}{7\cdot 11^2}$; c) $\frac{1}{2^2\cdot 5^2}+\frac{7}{2^3\cdot 5^3}$; d) $\frac{1}{20}+\frac{4}{16\cdot 25}$.

12. Calculați: $\frac{3}{40}+\frac{1}{160}+\frac{7}{320}+\frac{5}{64}$.

13. Efectuați:

a) $\frac{137}{150}+\frac{11}{450}+\frac{17}{300}$; b) $\frac{327}{654}+\frac{529}{1058}+\frac{1044}{348}$; c) $\frac{325}{975}+\frac{216}{648}+\frac{244}{732}$.

14. Calculați $a+b$, dacă: $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$; $b=\frac{2}{3}+\frac{3}{7}+\frac{5}{14}+\frac{4}{21}+\frac{7}{42}$.

15. Calculați suma:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$.

16. Efectuați:

a) $\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}$; b) $\frac{3}{20}+\frac{47}{180}+\frac{4}{15}+\frac{7}{60}$; c) $\frac{3}{25}+\frac{7}{60}+\frac{11}{50}+\frac{13}{100}$.

17. Calculați:

a) $\frac{3}{40}+\frac{7}{160}+\frac{33}{320}+\frac{5}{64}+\frac{11}{160}$; b) $\frac{7}{15}+\frac{1}{20}+\frac{3}{180}+\frac{11}{90}+\frac{5}{60}$; c) $\frac{7}{12}+\frac{4}{25}+\frac{15}{24}+\frac{1}{48}$.

18. Folosiți comutativitatea și asociativitatea pentru a efectua cât mai rapid următoarele calcule:

a) $7\frac{3}{4}+2\frac{1}{4}$; b) $5\frac{2}{9}+13\frac{7}{9}$; c) $47\frac{7}{13}+83\frac{6}{13}$; d) $4\frac{1}{15}+5\frac{7}{15}+10\frac{4}{5}$;

e) $51\frac{5}{21}+45\frac{4}{21}+11\frac{12}{21}$; f) $2\frac{1}{13}+1\frac{7}{26}$;

g) $3\frac{1}{5}+2\frac{1}{10}+\frac{9}{10}$; h) $\frac{13}{28}+1\frac{2}{32}+\frac{15}{28}+3\frac{5}{32}$.

Rezolvare: e) $51\frac{5}{21}+45\frac{4}{21}+11\frac{12}{21}=(51+45+11)+\frac{5+4+12}{21}=107+1=108$;

h) $\frac{13}{28}+1\frac{2}{32}+\frac{15}{28}+3\frac{5}{32}=4+\frac{13+15}{28}+\frac{2+5}{32}=5\frac{7}{32}$.

19. Calculați $(y+x)+(t+z)$, știind că $x+t=\frac{3}{22}$ și $y+z=\frac{7}{33}$.

20. Știind că $x=\frac{3}{7}$ și $y+z=\frac{11}{14}$, calculați $(z+x)+y$.

21. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a+b=\frac{2}{5}$ și $c=\frac{13}{5}$.

a) Calculați $(a+b)+c$.

b) Explicați ce proprietate vă permite să calculați $a+(b+c)$ și $a+b+c$; calculați aceste sume.

22. Fie $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x+y=\frac{29}{43}$ și $z+t=\frac{14}{43}$. Calculați:

a) $(x+y)+(z+t)$; b) $[x+(y+z)]+t$; c) $x+[(y+z)+t]$;
d) $(y+x)+(t+z)$; e) $x+y+z+t$; f) $t+z+y+x$.

Numiți proprietățile adunării pe care le-ați folosit pentru efectuarea calculelor.

23. Calculați:

a) $\left(43-37\frac{24}{35}\right)-\left(1\frac{11}{14}-\frac{2}{7}\right)$; b) $99\frac{11}{26}-\left(71\frac{3}{13}-23\frac{7}{26}\right)$.

24. Calculați:

a) $\left(23-19\frac{1}{4}\right)+\left(15\frac{3}{5}-15\right)-\left(2\frac{1}{3}-\frac{19}{24}\right)$; b) $12\frac{29}{90}+\left[13\frac{2}{3}+5\frac{5}{6}-14\frac{7}{9}-\left(5\frac{1}{72}-3\frac{5}{72}\right)\right]$.

25. Dintr-o livadă s-au recoltat $23\frac{1}{4}$ kg de mere și cu $17\frac{1}{7}$ kg mai multe pere. Câte kilograme de fructe s-au recoltat în total?

26. Efectuați adunările, completând părțile fracționare ale termenilor până la întreg și micșorând corespunzător suma, conform modelului:

Model: $3\frac{12}{17}+5\frac{11}{17}=\left(3\frac{12}{17}+\frac{5}{17}\right)+\left(5\frac{11}{17}+\frac{6}{17}\right)-\left(\frac{5}{17}+\frac{6}{17}\right)=4+6-\frac{11}{17}=9\frac{6}{17}$.

a) $3\frac{71}{77}+1\frac{47}{77}$; b) $5\frac{87}{92}+3\frac{79}{92}$; c) $76\frac{103}{105}+63\frac{97}{105}$.

27. Calculați, folosind proprietățile adunării:

a) $3+\frac{1}{5}+4+\frac{3}{5}$; b) $17+\frac{2}{3}+3+\frac{1}{3}$; c) $1+\frac{13}{28}+7+\frac{15}{28}$;

d) $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{4}{5}+\frac{26}{14}$; e) $5+\frac{2}{9}+7+\frac{7}{9}$; f) $5+\frac{1}{7}+3+\frac{3}{2}+\frac{5}{14}+2$.

28. Verificați proprietatea de comutativitate a adunării numerelor raționale pentru:

a) $a=3\frac{1}{104}, b=2\frac{5}{156}$; b) $a=\frac{17}{77}, b=3\frac{3}{55}$; c) $a=5\frac{13}{252}, b=\frac{115}{63}$.

29. Calculați, grupând convenabil termenii:

a) $11\frac{9}{15}+4\frac{4}{13}+10\frac{5}{26}+8\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$; b) $\frac{49}{100}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{9}{10}$;

c) $\frac{4}{25}+\frac{2}{15}+\frac{7}{12}+\frac{11}{100}+\frac{3}{50}+\frac{7}{60}$; d) $\frac{1}{5}+\frac{14}{15}+\frac{9}{14}+\frac{5}{84}+\frac{49}{75}$.

30. Calculați, folosind faptul că adunarea numerelor raționale este comutativă și asociativă:

a) $\frac{7}{17}+\frac{23}{17}+\frac{15}{17}$; b) $\frac{19}{29}+\frac{13}{29}+\frac{1}{29}+\frac{7}{29}$;

c) $\frac{1}{103}+\frac{2}{103}+\frac{3}{103}+...+\frac{9}{103}$; d) $\frac{5}{13}+\frac{4}{26}+\frac{25}{13}+\frac{16}{26}$.

31. Într-o ladă sunt $17\frac{2}{7}$ kg de mere, iar în alta cu $23\frac{6}{14}$ kg mai multe decât în prima. Câte kilograme de mere sunt în cele două lăzi la un loc?

32. Un număr este cu $\frac{7}{180}$ mai mare decât $\frac{11}{36}$. Aflați suma celor două numere.

33. Aflați numărul cu $\frac{144}{246}$ mai mare decât $\frac{17}{41}$.

34. Un turist a parcurs în prima zi $73\frac{1}{5}$ km, a doua zi $3\frac{1}{5}$ km și încă 50 km, iar în a treia zi a parcurs $47\frac{3}{5}$ km. Care este lungimea traseului?

35. Dintr-o livadă s-a recoltat în prima zi $\frac{26}{78}$ din total, a doua zi cu $\frac{19}{57}$ mai mult decât în prima zi. S-a terminat recoltatul în cele două zile?

36. Duminică, mama a pregătit $\frac{1}{8}$ din zarzavatul pentru iarnă, iar luni cu $\frac{1}{4}$ mai mult decât duminică. A câta parte din cantitatea de zarzavat a reușit mama să pregătească duminică și luni?

37. Suma a doi termeni este $\frac{14}{27}$, iar unul dintre termeni este $\frac{2}{9}$. Determinați celălalt termen.

38. a) Cât trebuie adăugat numărului rațional $\frac{3}{28}$ pentru a obține $\frac{1}{4}$?

b) Cu cât trebuie micșorat $\frac{49}{132}$ pentru a obține $\frac{2}{198}$?

c) Cu cât este mai mare $49\frac{4}{5}$ decât $13\frac{61}{45}$?

d) Cu cât este mai mic $8\frac{14}{15}$ decât $9\frac{1}{3}$?

39. Aflați numărul rațional cu $3\frac{1}{4}$ mai mare decât:

a) 3; b) $2\frac{1}{6}$; c) $8\frac{9}{48}$; d) $\frac{11}{60}$; e) $2\frac{1}{15}+4\frac{1}{30}+8$; f) $\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}$.

40. Într-un butoi sunt $17\frac{1}{5}$ litri de ulei, iar în altul sunt cu $3\frac{3}{5}$ litri mai mult decât în primul butoi. Câți litri de ulei sunt în cele două butoaie?

PE Aprofundare și performanță ***

41. Calculați:

a) $\frac{66}{77}-\frac{33}{55}$; b) $\frac{555}{777}-\frac{333}{888}$; c) $\frac{121212}{171717}-\frac{111111}{191919}$.

42. Un muncitor lucrând singur termină o lucrare în 24 de ore, altul în 40 de ore, iar al treilea în 15 ore.

a) Cât efectuează într-o oră fiecare muncitor?

b) Cât lucrează într-o oră cei trei muncitori împreună?

c) Calculați în câte ore termină lucrarea cei trei muncitori lucrând împreună.

43. O pompă umple un rezervor în 9 minute, alta în 84 de minute, iar a treia în 15 minute. Într-un minut a câta parte din rezervor vor umple cele trei pompe? Pot umple rezervorul cele trei pompe în 8 minute?

44. Calculați: $\frac{11}{13}+\frac{1111}{1313}+\frac{111111}{131313}+\frac{11111111}{13131313}$.

45. Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care:

a) $\frac{n+11}{n+1}\in\mathbb{N}$; b) $\frac{4n+9}{2n+1}\in\mathbb{N}$; c) $\frac{6n+20}{n+3}\in\mathbb{N}$; d) $\frac{n^2+4n+1}{n^2+2n}\in\mathbb{N}$.

Rezolvare: d) $\frac{n^2+4n+1}{n^2+2n}=\frac{(n^2+2n)+(2n+1)}{n^2+2n}=\frac{n^2+2n}{n^2+2n}+\frac{2n+1}{n^2+2n}=1+\frac{2n+1}{n^2+2n}$;

$\frac{n^2+4n+1}{n^2+2n}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 1+\frac{2n+1}{n^2+2n}\in\mathbb{N}$. Demonstrăm că $\frac{2n+1}{n^2+2n}\in\mathbb{N}$ și $\frac{2n+1}{n^2+2n}\leq 1$.

Din cele două relații rezultă $\frac{2n+1}{n^2+2n}=1\Leftrightarrow 2n+1=n^2+2n\Leftrightarrow n^2=1\Leftrightarrow n=1$.

46. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.

b) Calculați $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$.

47. Demonstrați că $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4\}$, știind că $\frac{x}{5}+\frac{y}{5^2}+\frac{z}{5^3}+\frac{t}{5^4}=0{,}4704$.

48. Determinați cifrele a, b, c, d, știind că: $a+\overline{a,b}+\overline{a,bc}+\overline{a,bcd}=16{,}624$.

PE-PP Supermate ****

49. Demonstrați că $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{99^2}<1$.

Rezolvare: Se observă că $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}$; ...; $\frac{1}{99^2}<\frac{1}{98\cdot 99}$. Însumând se obține:

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{99^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{89\cdot 90}$ (1).

Ținând cont $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ se obține în membrul drept $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{89\cdot 90}=$

$=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+...+\cancel{\frac{1}{98}}-\frac{1}{99}= {}^{99)}\frac{1}{1}-\frac{1}{99}=\frac{99-1}{99}=\frac{98}{99}$ și din relația (1) rezultă

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{99^2}<\frac{98}{99}<1$.

50. Demonstrați că:

a) $\frac{1}{2}\le\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200}<1$; b) $\frac{2}{5}<\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{2001}<1$.

51. a) Comparați numerele raționale $\frac{n+1}{n}$ și $\frac{n+2}{n+1}$.

b) Demonstrați că $99{,}99<\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+...+\frac{101}{100}<1{,}5\cdot 99$.

52. a) Demonstrați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și $k \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\frac{1}{n\cdot(n+k)}=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right).$$

b) Calculați $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{2011\cdot 2014}$.

53. Se consideră $S=\frac{1}{39}+\frac{1}{40}+\frac{1}{41}+...+\frac{1}{50}$. Demonstrați că $0{,}24<S<0{,}(3)$.

Rezolvare: Suma conține 50 – 39 + 1 = 12 (fracții). Din 39 < 40 < 41 < … < 50 rezultă că $\frac{1}{39}>\frac{1}{40}>\frac{1}{41}>...>\frac{1}{50}$. Avem $\frac{1}{39}+\frac{1}{40}+\frac{1}{41}+...+\frac{1}{50}>\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+...+\frac{1}{50}= {}^{2)}\frac{12}{50}=$

$=\frac{24}{100}=0{,}24$ (1) și $\frac{1}{39}+\frac{1}{40}+\frac{1}{41}+...+\frac{1}{50}<\frac{1}{39}+\frac{1}{39}+\frac{1}{39}+...+\frac{1}{39}=\frac{12}{39}<\frac{13}{39}=\frac{1}{3}=0{,}(3)$ (2)

Din (1) și (2) rezultă că $0{,}24<S<0{,}(3)$.

PE Test de autoevaluare

• Se acordă 1 punct din oficiu.

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** A amplifica o fracție cu un număr natural nenul x înseamnă ....

....

(0,5p) **2.** Se numește fracție ireductibilă ....

....

(0,5p) **3.** Fracția ordinară corespunzătoare fracției zecimale $0{,}1(6)$ este ....

(0,5p) **4.** Forma zecimală a fracției ordinare $\frac{11}{4}$ este …… .

(0,5p) **5.** Fracția echivalentă cu fracția $\frac{2}{3}$ care are numitorul 18 …… .

(0,5p) **6.** Rezultatul calculului $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}$ este …… .

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** A 2014-a zecimală a numărului 3,(1234) este egală cu:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(0,5p) **2.** Numărul cu care poate fi simplificată fracția $\frac{\overline{xy0xy}}{\overline{yx0yx}}$ este egal cu:

A. 101 B. 1001 C. 111 D. 1111

(0,5p) **3.** Soluția ecuației $1{,}(3)-x=\frac{1}{3}$ este egală cu:

A. 0 B. 1 C. 0,(3) D. $1\frac{1}{3}$

(0,5p) **4.** Rezultatul calculului $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{1}{10}$ este egal cu:

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $1\frac{4}{5}$ D. $1\frac{5}{4}$

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** a) Scrieți toate fracțiile echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$ care au numitorul cel mult egal cu 25.

b) Scrieți toate fracțiile echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$ care au numărătorul mai mic sau egal cu 15.

(1p) **2.** a) Scoateți întregii din fracția $\frac{73}{5}$.

b) Introduceți întregii în fracția $4\frac{3}{7}$.

(1p) **3.** Numărătorul unei fracții este cu 37 mai mare decât numitorul. Simplificând fracția cu un număr natural, se obține $\frac{7}{6}$. Cu ce număr a fost simplificată fracția?

(1p) **4.** Determinați cifra a, știind că $16,8(a) < \frac{423}{25}$.

6. Înmulțirea numerelor raționale pozitive

PE-PP

Dacă a și b sunt două numere raționale, atunci **produsul** lor se notează cu $a \cdot b$; numerele a și b se numesc **factorii produsului.**

Operația prin care se obține produsul a două numere raționale se numește **înmulțire.**

Înmulțirea unui număr natural cu un număr rațional reprezentat printr-o fracție ordinară

Pentru a înmulți un număr natural cu un număr rațional reprezentat de o fracție ordinară, se înmulțește numărul cu numărătorul și se păstrează numitorul:

$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$, oricare ar fi n, a și b numere naturale, cu b diferit de zero.

Exemple: a) $4 \cdot \frac{5}{24} = \frac{4 \cdot 5}{24} = \frac{^{4)}20}{24} = \frac{5}{6}$;

b) $12 \cdot \frac{11}{21} = \frac{12 \cdot 11}{21} = \frac{^{3)}132}{21} = \frac{44}{21}$.

Înmulțirea a două numere raționale reprezentate prin fracții ordinare

Pentru a înmulți două numere raționale reprezentate prin fracții ordinare, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, oricare ar fi a, b, c, d numere naturale, cu b și d diferite de zero.

Exemple: a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{^{2)}4}{6} = \frac{2}{3}$;

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{6} = \frac{3 \cdot 15}{5 \cdot 6} = \frac{^{5)}45}{30} = \frac{^{3)}9}{6} = \frac{3}{2}$.

Observație: Calculele devin mult mai ușoare dacă se fac simplificările înainte de a efectua produsul.

Exemple: a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$; b) $\frac{24}{56} \cdot \frac{49}{3} = \frac{\overset{1}{\cancel{\overset{8}{\cancel{24}}}} \cdot \overset{7}{\cancel{49}}}{\underset{1}{\cancel{\underset{8}{\cancel{56}}}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{1 \cdot 7}{1 \cdot 1} = 7$.

Înmulțirea a două numere raționale reprezentate prin fracții de tipuri diferite

Dacă factorii sunt reprezentați de fracții ordinare ce au numitori de forma $2^m \cdot 5^n$, se pot transforma în fracții zecimale finite.

Exemplu: $0,16 \cdot \frac{1}{25} = \frac{16}{100} \cdot \frac{1}{25} = \frac{\overset{4}{\cancel{16}} \cdot 1}{\underset{25}{\cancel{100}} \cdot 25} = \frac{4 \cdot 1}{25 \cdot 25} = \frac{4}{625} = 0,0064$ sau transformând în fracții zecimale $0,16 \cdot \frac{1}{25} = 0,16 \cdot 0,04 = 0,0064$.

Observație: Dacă numerele raționale sunt reprezentate prin numere naturale sau fracții zecimale finite, atunci produsul lor se efectuează astfel:

Exemple:

(1) $23 \cdot 212 = 4876$;
(2) $5{,}24 \cdot 3 = 15{,}72$;
(3) $2{,}14 \cdot 3{,}1 = 6{,}634$.

$$\text{(1)}\quad \begin{array}{r} 23\,\cdot \\ 212 \\ \hline 46 \\ 23 \\ 46 \\ \hline 4876 \end{array} \qquad \text{(2)}\quad \begin{array}{rl} 524\,\cdot & \text{2 zecimale} \\ 3 & \text{0 zecimale} \\ \hline 1572 & \text{2 zecimale} \end{array} \qquad \text{(3)}\quad \begin{array}{rl} 214\,\cdot & \text{2 zecimale} \\ 31 & \text{1 zecimală} \\ \hline 214 & \\ 642 & \\ \hline 6634 & \text{3 zecimale} \end{array}$$

Se trece virgula la rezultat astfel încât produsul să conţină tot atâtea zecimale câte au împreună factorii produsului.

Dacă cel puţin unul dintre factorii produsului este reprezentat de o fracţie zecimală, atunci, de regulă, se transformă fiecare factor în fracţie ordinară.

Exemple: a) $0{,}1(3) \cdot 2{,}4 = \frac{13-1}{90} \cdot \frac{24}{10} = \frac{12}{90} \cdot \frac{24}{10} = \frac{\cancel{12} \cdot \cancel{24}}{\cancel{90} \cdot \cancel{10}} = \frac{1 \cdot 8}{5 \cdot 5} = \frac{8}{25} = 0{,}32$;

b) $2{,}(4) \cdot \frac{9}{11} = 2\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{11} = \frac{22}{9} \cdot \frac{9}{11} = 2$;

c) $\frac{5}{6} \cdot 0{,}75 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3^{(3}}{6 \cdot 4} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

Proprietăţile operaţiei de înmulţire:

1. Oricare ar fi a şi b numere raţionale, $a \cdot b$ este un număr raţional.
2. Înmulţirea numerelor raţionale este **comutativă**, adică oricare ar fi numerele raţionale a şi b, $a \cdot b = b \cdot a$.
3. Numărul raţional 1 este **elementul neutru** la înmulţire, adică oricare ar fi numărul raţional a, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
4. Pentru orice număr raţional nenul a există un număr raţional unic a' astfel încât $a \cdot a' = a' \cdot a = 1$.
5. Înmulţirea numerelor raţionale este **asociativă**, adică oricare ar fi numerele raţionale a, b şi c, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
6. Înmulţirea numerelor raţionale este distributivă faţă de adunare şi scădere, adică oricare ar fi numerele raţionale a, b şi c, avem:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ şi } a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Observaţie: Foarte utile sunt şi următoarele reguli de calcul:

a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$ şi c este diferit de zero, atunci are loc **regula simplificării**:

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c.$$

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$ şi $c > 0$, atunci $a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

c) Dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Estimarea unui produs

Un produs poate fi estimat rotunjind fiecare factor la cel mai apropiat întreg.

Exemplu: $P = 1{,}1(6) \cdot 2\frac{1}{4}$ poate fi estimat prin rotunjirea numărului $1{,}1(6)$ la 1 şi a numărului $2\frac{1}{4} = 2{,}25$ la 2. Astfel, produsul se estimează ca fiind 2, adică $P \approx 1{,}2 \cdot 2{,}3$, adică $P \approx 2$. Se poate rotunji fiecare factor la zecimi şi se obţine o estimare mai bună. Astfel, $1{,}1(6)$ se rotunjeşte la $1{,}2$, iar $2\frac{1}{4} = 2{,}25$ se rotunjeşte la $2{,}3$ astfel încât estimarea produsului este $P \approx 1{,}2 \cdot 2{,}3$, adică $P \approx 2{,}76$.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi ca adunare repetată:

a) $2 \cdot \frac{3}{5}$; b) $3 \cdot \frac{2}{5}$; c) $7 \cdot \frac{2}{5}$; d) $2 \cdot \frac{7}{5}$;
e) $6 \cdot \frac{3}{4}$; f) $3 \cdot \frac{3}{2}$; g) $20 \cdot \frac{7}{25}$; h) $\frac{1}{36} \cdot 21$.

2. Scrieţi următoarele adunări de numere raţionale ca înmulţire de numere raţionale şi apoi efectuaţi calculele:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; b) $\frac{7}{13} + \frac{7}{13} + \frac{7}{13} + \frac{7}{13}$;
c) $\frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \ldots + \frac{3}{16}$ (5 termeni); d) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{5}$ (10 termeni);
e) $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10}$ (50 de termeni); f) $\frac{5}{23} + \frac{5}{23} + \ldots + \frac{5}{23}$ (100 de termeni).

3. Calculaţi:

a) $2 \cdot \frac{3}{7}$ şi $2\frac{3}{7}$; b) $4 \cdot \frac{1}{8}$ şi $4\frac{1}{8}$; c) $3 \cdot \frac{2}{9}$ şi $3\frac{2}{9}$;
d) $5 \cdot \frac{1}{4}$ şi $5\frac{1}{4}$; e) $7 \cdot \frac{1}{4}$ şi $7\frac{1}{4}$; f) $12 \cdot \frac{5}{6}$ şi $12\frac{5}{6}$.

4. Calculaţi:

a) $7 \cdot \frac{3}{5}$; b) $2 \cdot \frac{5}{8}$; c) $\frac{1}{3} \cdot 12$; d) $\frac{7}{56} \cdot 14$; e) $\frac{3}{5} \cdot 1$; f) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$;
g) $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}$; h) $\frac{4}{5} \cdot \frac{11}{8}$; i) $\frac{17}{10} \cdot \frac{20}{3}$; j) $1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$; k) $3\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{15}$; l) $\frac{9}{8} \cdot 1\frac{3}{5}$.

5. Calculaţi:

a) $0{,}35 \cdot 10$; b) $4{,}72 \cdot 100$; c) $1{,}29 \cdot 1000$; d) $1{,}7 \cdot 10\,000$;
e) $10^5 \cdot 0{,}4$; f) $10^6 \cdot 31{,}473$; g) $10^7 \cdot 3{,}5$; h) $8{,}04 \cdot 10^8$.

6. Fără a efectua calculul, stabiliţi numărul de zecimale ale rezultatului:

a) $2{,}3 \cdot 731$; b) $2{,}3 \cdot 2{,}71$; c) $7{,}9 \cdot 1{,}7$;
d) $1{,}721 \cdot 3{,}29$; e) $9{,}007 \cdot 2{,}4$; f) $1{,}71 \cdot 2{,}44071$.

7. Efectuați calculele: a) $4{,}08 \cdot 2{,}305$; b) $1{,}25 \cdot 2{,}004$.
Care este numărul de zecimale al rezultatului? Justificați.

8. Calculați:

a) $1{,}6 \cdot 3{,}2$; b) $8{,}21 \cdot 0{,}4$; c) $6{,}4 \cdot 2{,}3$;
d) $9{,}62 \cdot 0{,}8$; e) $0{,}26 \cdot 5{,}25$; f) $1{,}25 \cdot 1{,}004$;
g) $6{,}13 \cdot 2{,}211$; h) $3{,}3 \cdot 4{,}312$; i) $7{,}08 \cdot 2{,}305$.

9. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ordinară:

a) $2{,}52 \cdot 0{,}(3)$; b) $\frac{5}{7} \cdot 2{,}8$; c) $\frac{5}{9} \cdot 7{,}2$;

d) $4{,}(3) \cdot 4{,}(2)$; e) $\frac{9}{38} \cdot 4{,}(2)$; f) $1{,}2(1) \cdot \frac{109}{90}$.

PE Aplicare și exersare **

10. Folosind proprietățile înmulțirii numerelor raționale, calculați:

a) $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{21}{18}$; b) $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{18}\right)$; c) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{18}$;

d) $\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)$; e) $\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}$; f) $\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}$.

11. a) Știind că $a \cdot b = \frac{3}{7}$ și $c = \frac{14}{15}$, calculați $a \cdot (b \cdot c)$.

b) Știind că $a \cdot b = \frac{21}{17}$ și $c = \frac{51}{14}$, calculați $(a \cdot b) \cdot c$.

c) Știind că $a \cdot b = \frac{42}{5}$ și $c \cdot d = \frac{35}{77}$, calculați $a \cdot (b \cdot c) \cdot d$.

12. Calculați în două moduri:

a) $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)$; b) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{24}\right)$; c) $\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7}{15}-\frac{3}{10}\right)$.

13. a) Știind că $a \cdot b = \frac{3}{7}$ și $a \cdot c = \frac{15}{28}$, calculați $a \cdot (b + c)$.

b) Știind că $a \cdot b = \frac{33}{121}$ și $a \cdot c = \frac{3}{11}$, calculați $(b + c) \cdot a$ și $(b - c) \cdot a$.

c) Știind că $a \cdot b = 1\frac{7}{8}$, $a \cdot c = \frac{1}{20}$ și $a \cdot d = \frac{7}{12}$, calculați:

$a \cdot (b + c - d)$, $a \cdot (b - c + d)$ și $a \cdot (b + c + d)$.

14. Calculați scoțând factor comun:

a) $\frac{3}{7}\cdot 77+\frac{2}{5}\cdot 77$; b) $3\cdot 5+3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{17}{16}$; c) $\frac{2}{5}\cdot 7+3\cdot 7-7\cdot\frac{12}{5}$;

d) $\frac{3}{19}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{19}\cdot\frac{4}{7}$; e) $\frac{2}{23}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{46}$; f) $5\cdot\frac{7}{11}+5\cdot\frac{3}{22}-5\cdot\frac{1}{2}$.

15. Efectuați: $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{4}\cdot\ldots\cdot 1\frac{1}{100}$.

16. Calculați $A \cdot B$, unde: $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{19}{20}$ și $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{20}{21}$.

17. Determinați produsele:

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{15}{2}$; b) $3\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4}$; c) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot 1\frac{1}{2}$; d) $\frac{5}{6}\cdot 3\frac{4}{5}\cdot\frac{30}{19}$.

18. Efectuați: a) $9\frac{2}{14}\cdot\frac{42}{128}\cdot 11\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{68}$; b) $102\cdot\frac{3}{204}\cdot 2\frac{1}{9}\cdot\frac{6}{19}$; c) $\frac{55}{44}\cdot\frac{88}{77}\cdot\frac{33}{22}\cdot\frac{70}{25}$.

19. Un automobil are viteza de 70 km pe oră. Ce distanță va parcurge în:

a) $3\frac{1}{5}$ ore; b) $7\frac{2}{7}$ ore?

20. De pe o suprafață cultivată cu cartofi un fermier strânge o recoltă de 3,612 tone. Din această cantitate, trei sferturi le vinde cu 1,25 lei kilogramul și un sfert cu 0,75 lei kilogramul.

a) Ce cantitate de cartofi vinde fermierul la prețul de 1,25 lei kilogramul? Dar la prețul de 0,75 lei kilogramul?

b) Care este suma de bani obținută de fermier în urma vânzării cartofilor?

PE Aprofundare și performanță ***

21. Notăm $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}=S$. Calculați: a) $S-\frac{1}{2}S$; b) S.

Rezolvare: a) $S-\frac{1}{2}S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}-$
$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\ldots-\frac{1}{2^{100}}-\frac{1}{2^{101}}=1-\frac{1}{2^{101}}$.

b) Rezultă $\frac{1}{2}S=1-\frac{1}{2^{101}}\,|\cdot 2 \Rightarrow S=2-\frac{1}{2^{101}}$.

22. Dacă $a \in \mathbb{Q}_+$ și $a > 1$, arătați că: $1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

23. Se știe că dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$, atunci:

1) $a + 0 = 0 + a = a$ (0 este element neutru la adunare);
2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c$ (înmulțirea este distributivă față de adunare);
3) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ (regula reducerii).

Folosind numai cele trei proprietăți, demonstrați că, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$, $a \cdot 0 = 0$.

24. Calculați: $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{5}\cdot\ldots\cdot 1\frac{1}{1000}$.

25. Arătați că numărul A este pătrat perfect, unde

$$A=(2+4+6+\ldots+4026)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot 2014}\right).$$

PE-PP 7. Împărţirea numerelor raţionale pozitive

Inversul unui număr raţional nenul reprezentat prin fracţia ordinară $\frac{a}{b}$ este numărul raţional reprezentat de fracţia ordinară $\frac{b}{a}$.

Exemple: a) inversul numărului 7 este $\frac{1}{7}$; b) inversul numărului $\frac{1}{5}$ este 5; c) inversul numărului $\frac{3}{5}$ este $\frac{5}{3}$.

Observaţie: Pentru orice numere naturale nenule a şi b are loc relaţia $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$.

Împărţirea a două numere raţionale reprezentate prin fracţii ordinare

Pentru a împărţi două numere raţionale reprezentate prin fracţii ordinare, se înmulţeşte primul număr raţional cu inversul celui de-al doilea număr raţional:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Exemple: a) $\frac{4}{5}:\frac{6}{35}=\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{6}=\frac{\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{35}^{7}}{\cancel{5}_{1}\cdot\cancel{6}_{3}}=\frac{2\cdot7}{1\cdot3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}=4,(6)$;

b) $\frac{3}{2}:\frac{9}{14}=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{9}_{3}}=\frac{1\cdot7}{1\cdot3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}=2,(3)$.

Împărţirea a două numere raţionale reprezentate prin fracţii zecimale finite

Dacă cele două numere raţionale sunt reprezentate prin fracţii zecimale finite, atunci:

- **se înmulţesc deîmpărţitul şi împărţitorul cu 10^n, unde n este numărul de zecimale ale împărţitorului;**
- **se procedează apoi ca la împărţirea numerelor naturale, cu observaţia că virgula se adaugă la cât atunci când se ajunge cu ea la deîmpărţit.**

Exemple:

(1) 0,175 : 2,5 = 1,75 : 25 = 0,07;

(2) 2,816 : 3,2 = 28,16 : 32 = 0,88.

(1)

$$\begin{array}{r|l} 1,75 & 25 \\ \cline{2-2} \underline{\ \ 175} & 0,07 \\ = = = & \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r|l} 28,16 & 32 \\ \cline{2-2} \underline{256\ \ } & 0,88 \\ = 256 & \\ \underline{256} & \\ = = = & \end{array}$$

Împărţirea a două numere raţionale reprezentate prin fracţii periodice sau fracţii de tipuri diferite

Dacă cel puţin unul dintre numerele raţionale este reprezentat printr-o fracţie zecimală periodică, atunci numerele raţionale se scriu ca fracţii ordinare, după care se efectuează împărţirea.

Exemplu: $2,5:2,8(3)=\frac{25}{10}:2\frac{83-8}{90}=\frac{5}{2}:2\frac{75^{(15}}{90}=\frac{5}{2}:2\frac{5}{6}=\frac{5}{2}:\frac{17}{6}=\frac{5}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{6}^{3}}{17}=\frac{15}{17}$.

Estimarea unui cât

O estimare a unui cât se obţine rotunjind atât deîmpărţitul, cât şi împărţitorul la întregi.

Exemplu: Se obţine o estimare a câtului $4,4:1\frac{1}{5}$ dacă rotunjim deîmpărţitul la 4 şi împărţitorul la 1, adică $c\approx4:1=4$.

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Completaţi tabelul următor:

numărul	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{3}$	3	1,2	0,(2)						$2\frac{3}{2}$
inversul numărului						5	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	0,3	$1\frac{5}{4}$	

2. Calculaţi:

a) $3:\frac{5}{2}$; b) $5:\frac{3}{4}$; c) $8:\frac{1}{2}$; d) $2:3\frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{3}:4$; f) $\frac{8}{7}:6$; g) $\frac{1}{3}:3$; h) $2\frac{3}{2}:2$.

3. Calculaţi:

a) $\frac{2}{11}:\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{4}:\frac{7}{5}$; c) $\frac{5}{6}:\frac{7}{3}$; d) $\frac{1}{3}:\frac{2}{9}$;

e) $\frac{5}{9}:\frac{1}{6}$; f) $\frac{2}{7}:1\frac{1}{3}$; g) $5\frac{1}{2}:\frac{4}{3}$; h) $5\frac{1}{2}:10\frac{1}{4}$.

4. Calculaţi:

a) 32,5 : 10; b) 172,25 : 100; c) 5,1 : 1000;

d) $97,6:10^4$; e) $32,51:10^5$; f) $9378,5:10^6$.

5. Calculaţi (după model):

a) $3,25:0,1=3,25:\frac{1}{10}=3,25\cdot10=32,5$;

b) 7,25 : 0,01; c) 0,935 : 0,001; d) 1,325 : 0,0001.

6. Calculaţi:

a) 210,25 : 7,25; b) 2500,2 : 0,18; c) 15,875 : 0,635;

d) 675,1 : 7,85; e) 144,2 : 4,12; f) 2338,5 : 0,15;

g) 45,908 : 0,92; h) 0,6345 : 0,045; i) 879,16: 1,2.

7. Calculaţi:

a) $2,(3):\frac{5}{6}$; b) $\frac{2}{9}:0,(3)$; c) $\frac{69}{11}:2,(09)$;

d) $0,95:\frac{38}{20}$; e) 0,2(5) : 0,(5); f) 0,8(2) : 0,(2).

PE Aplicare și exersare **

8. Calculați:

a) $\frac{2}{7}:\frac{3}{5}$; b) $3\frac{1}{3}:1\frac{1}{9}$; c) $\frac{65}{8}:4\frac{1}{16}$; d) $1:3\frac{1}{7}$.

9. Efectuați:

a) $\frac{5}{21}:\frac{15}{28}$; b) $3\frac{4}{17}:\frac{55}{51}$; c) $\dfrac{\frac{1}{7}:\frac{3}{5}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}}$; d) $\dfrac{\frac{72}{24}}{\frac{32}{12}}$; e) $\dfrac{\frac{35}{108}}{\frac{385}{324}}$; f) $\dfrac{2\frac{19}{49}}{5\frac{4}{7}}$.

10. Efectuați: a) $\frac{5}{7}:\frac{15}{42}$; b) $\frac{17}{150}:\frac{34}{300}$; c) $11:20\frac{1}{6}$.

11. Calculați și completați tabelul:

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$	$\frac{c}{d}:\frac{a}{b}$
$\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{3}$		
$3\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{4}$		

12. Calculați:

a) $\dfrac{\frac{3}{5}}{2\frac{1}{10}}$; b) $\dfrac{\frac{8}{13}}{\frac{40}{26}}$; c) $\dfrac{1}{\frac{16}{5}}$; d) $\dfrac{3}{\frac{6}{11}}$; e) $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{5}{14}}$; f) $\dfrac{3\frac{1}{7}}{\frac{22}{21}}$.

13. Efectuați:

a) $\frac{17}{150}:\frac{34}{300}$; b) $11:20\frac{1}{6}$; c) $14:3\frac{1}{2}$; d) $3\frac{5}{6}:1\frac{11}{12}$;

e) $3\frac{4}{5}:1\frac{2}{17}$; f) $\frac{4}{5}:1\frac{2}{3}\cdot2\frac{1}{12}$; g) $31\frac{1}{4}:20\frac{5}{6}$; h) $20\frac{2}{3}:15\frac{2}{4}$.

14. Calculați:

a) $\left(\frac{17}{3}:\frac{21}{4}\right):\frac{34}{7}$; b) $\left(\frac{36}{13}:4\right):\left(\frac{5}{26}:\frac{7}{36}\right)$; c) $\left(3\frac{1}{2}:2\frac{1}{3}\right):\left(6:\frac{12}{19}\right)$.

15. Determinați câtul numerelor:

a) 121 și 22; b) $\frac{12}{32}$ și $\frac{72}{20}$; c) 19 și $\frac{19}{5}$.

16. Aflați numărul rațional care înmulțit cu $\frac{56}{90}$ dă numărul rațional $\frac{35}{27}$.

17. Împărțind un număr rațional la $\frac{21}{220}$, se obține $5\frac{5}{42}$. Care este acest număr?

PE Aprofundare și performanță ***

18. La fabricarea pâinii, făina absoarbe apă în cantitate de $\frac{3}{5}$ din masa ei și prin coacere pierde 0,12 din masă. Câte kilograme de pâine se vor fabrica din 2,5 t de făină. Câte pâini de 400 g se vor fabrica?

19. La o fermă agricolă a fost cultivat grâu pe 1,5 hectare și s-a obținut o producție de 3 600 kg la hectar. Din grâul obținut s-au măcinat două cincimi. Jumătate din grâul rămas a fost vândut cu 3,90 lei, iar din cantitatea de făină obținută s-a vândut $\frac{3}{10}$ cu 9,9 lei kilogramul. Câți lei s-au încasat pe grâul și făina vândute, știind că prin măcinare grâul pierde $\frac{3}{25}$ din greutate? Câte kilograme de grâu și câte kilograme de făină au mai rămas?

20. La o bancă este afișat următorul curs de schimb valutar:

1 euro = 4,30 lei;
1 dolar = 3,30 lei.

Aflați x (cu două zecimale exacte) din egalitatea:

a) 1 euro = x dolari; b) 1 dolar = x euro.

PE-PP Supermate ****

21. a) Demonstrați că pentru orice n, număr natural nenul, are loc egalitatea:

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

b) Folosind egalitatea demonstrată la punctul a), arătați că:

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{2015^3}<1,5.$$

Rezolvare: b) Pentru a folosi relația de la punctul a) scriem:

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{2015^3}<\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+...+\frac{1}{2013\cdot2014\cdot2015}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+...+\frac{2}{2013\cdot2014\cdot2015}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3-1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{4-2}{2\cdot3\cdot4}+...+\frac{2015-2013}{2013\cdot2014\cdot2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{4}{2\cdot3\cdot4}-\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+...+\frac{2015}{2013\cdot2014\cdot2015}-\frac{2013}{2013\cdot2014\cdot2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}+\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot4}}+...+\cancel{\frac{1}{2013\cdot2014}}-\frac{1}{2014\cdot2015}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2014\cdot2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2014\cdot2015}<\frac{1}{4}, \text{ adică } \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{2015^3}<\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{2015^3}<\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{2015^3}<\frac{11}{8}<\frac{12}{8}=1,5.$$

22. a) Demonstrați că $1 + 3 + 5 + … + (2n - 1)^2 = n^2$.

b) Calculați $1 + 3 + 5 + … + 2015$.

23. Se consideră numărul $n=\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+...+\frac{1}{1+3+5+...+2015}$.

Arătați că $n < \frac{1007}{1008}$.

Rezolvare: Din egalitățile $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, ..., $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)^2 = n^2$ se poate calcula suma $1 + 3 + 5 + \ldots + 2015 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot 1008 - 1) = 1008^2$ și exercițiul devine $n = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \ldots + \frac{1}{1+3+5+\ldots+2015} =$

$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{1008^2}$ (1).

Dar $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$; $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 3}$; ...; $\frac{1}{1008^2} = \frac{1}{1008 \cdot 1008} < \frac{1}{1007 \cdot 1008}$.

Din (1) rezultă că $n < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1007 \cdot 1008}$, iar $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1007 \cdot 1008} =$

$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{1007}} - \frac{1}{1008} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1008} = \frac{1008-1}{1008}$, adică $n < \frac{1007}{1008}$.

24. Se consideră numărul $n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{10^2}$. Ordonați crescător numerele 0,9; n și 0,4(09).

25. Calculați suma: $S = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+4+\ldots+2015}$.

PE Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Inversul numărului rațional $\frac{3}{4}$ este numărul rațional ...... care se mai notează ......

(0,5p) **2.** Numărul de 4 ori mai mare decât $\frac{7}{20}$ este ....

(0,5p) **3.** Rezultatul calculului $0{,}25 : \frac{1}{8}$ este egal cu ......

(0,5p) **4.** Un muncitor produce 10 piese într-o oră. În $\frac{3}{5}$ ore el va produce ...... piese.

(0,5p) **5.** Dacă într-un exercițiu apar înmulțiri, adunări, scăderi și împărțiri, atunci ele se vor rezolva în următoarea ordine: întâi ...., care sunt operații de ordinul ...., și apoi ...., care sunt operații de ordinul ....

(0,5p) **6.** Într-o oră un robinet umple $\frac{1}{4}$ dintr-un bazin. Dacă robinetul rămâne deschis, bazinul de va umple în ...... ore.

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{4}{5} : 1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{12}$ este egal cu:

A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

(0,5p) **2.** Calculând $\frac{4}{13}$ din $\left(4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{3}\right)$ se obține:

A. $\frac{1}{4}$ B. 4 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

(0,5p) **3.** Numărul de 1,5 ori mai mic decât numărul $\left(2 - \frac{1}{2}\right)$ este:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 1

(0,5p) **4.** Suma între produsul numerelor 0,(3) și 0,75 și câtul numerelor 2,1(3) și $1\frac{1}{11}$ este egală cu:

A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{13}{12}$ C. $\frac{12}{135}$ D. $\frac{135}{12}$

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** a) Scrieți trei numere raționale strict mai mari ca $\frac{1}{4}$ și mai mici sau egale cu $\frac{1}{2}$.

b) Comparați numerele 1,(23) cu 1,2(3).

(1p) **2.** Un elev a rezolvat $\frac{2}{3}$ din tema la matematică. Calculați câte probleme a avut temă, știind că mai are de rezolvat încă 3 probleme.

(1p) **3.** Calculați $10 \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{7}{12} - \frac{3}{8}\right) : \frac{5}{24}\right]$.

(1p) **4.** Alexandra dorește să cumpere 3,5 kg zahăr pentru a face dulceață de gutui. Zahărul este ambalat în pungi de 700 g. Calculați câte pungi trebuie să cumpere Alexandra.

PE-PP 8. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a unui număr rațional pozitiv. Reguli de calcul cu puteri

Ridicarea la putere este o înmulțire repetată. De exemplu, în loc de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ se scrie 2^6 și se citește „doi la puterea a șasea". Altfel spus, $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. În general:

Definiție: Dacă $a \in \mathbb{Q}$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se definește **„puterea a *n*-a a numărului *a*"** sau **„*a* la puterea *n*"** astfel:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

Prin convenție, $a^0 = 1$ (pentru $a \neq 0$) și $a^1 = a$.
În scrierea a^n, numărul a se numește **bază**, iar n se numește **exponent**.

Observații:

1. Nu se atribuie niciun sens pentru 0^0. Altfel spus, 0^0 nu se definește. Se mai spune că 0^0 nu are sens.

2. a^2 se mai citește „*a* la pătrat", iar a^3 se mai citește „*a* la cub". Aceasta se explică prin faptul că aria unui pătrat cu latura de lungime a este $a \cdot a = a^2$, iar volumul unui cub cu latura de lungime a este $a \cdot a \cdot a = a^3$.

Exemple: 1. $(0,5)^3 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125$;

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$.

În general, dacă $a, b, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$. Deci:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.}$$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$;

4. $(0,25)^3 = \left(\frac{^{(25}25}{100}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$;

5. $(0,(6))^3 = \left(\frac{^{(25}6}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

REGULI DE CALCUL CU PUTERI

Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$ și $m, n \in \mathbb{N}$. Atunci în calcule cu puteri se aplică următoarele reguli:

1. Înmulțirea puterilor cu aceeași bază: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$
(se scrie baza și se adună exponenții)

Exemple: $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^{7+8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$; $(0,6)^9 \cdot (0,6)^3 = (0,6)^{9+3} = (0,6)^{12}$.

2. **Împărțirea puterilor care au aceeași bază:** $a^m : a^n = a^{m-n}$

(se scrie baza și se scad exponenții)

Exemple: $\left(\frac{1}{3}\right)^{15} : \left(\frac{1}{3}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{15-13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$; $(2,(6))^4 : (2,(6))^2 = (2,(6))^{4-2} = (2,(6))^2$.

3. **Puterea unei puteri:** $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

(se scrie baza și se înmulțesc exponenții)

Exemple: $\left[\left(2\frac{1}{3}\right)^2\right]^5 = \left(2\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 5} = \left(2\frac{1}{3}\right)^{10}$; $\left[(1,(2))^3\right]^4 = (1,(2))^{3\cdot 4} = (1,(2))^{12}$.

4. **Puterea unui produs:** $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

(se ridică la putere fiecare factor al produsului)

Exemple: $\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2$; $(0,5\cdot 0,3)^4 = (0,5)^4\cdot(0,3)^4$.

5. **Puterea unui cât:** $(a:b)^n = a^n : b^n$

(se ridică la putere fiecare factor al câtului)

Exemple: $\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $(0,75:5)^3 = (0,75)^3 : 5^3$;

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{0,6}\right)^3 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{(0,6)^3};\quad \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}\right)^3 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^3}.$$

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Scrieți cu ajutorul puterilor:

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$; c) $0,(2)\cdot 0,(2)$;

d) $(1,1(2))\cdot(1,1(2))\cdot(1,1(2))$; e) $\left(2\frac{1}{7}\right)\cdot\left(2\frac{1}{7}\right)\cdot\left(2\frac{1}{7}\right)\cdot\left(2\frac{1}{7}\right)$.

2. Scrieți puterea care are:

a) baza $\frac{1}{7}$ și exponentul 2; b) baza 1,(2) și exponentul 5;

c) baza 0,3 și exponentul 16; d) baza $2\frac{1}{3}$ și exponentul 4.

3. Scrieți utilizând notațiile matematice corespunzătoare:

a) puterea a 5-a a numărului $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}$ la puterea a 3-a;

c) 0,9 la cub; d) cubul lui $\frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{2}$ la pătrat; f) pătratul lui 0,7.

4. Calculați:

a) 2^6; b) 5^3; c) 19^1; d) 18^2; e) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;

f) $(0,5)^3$; g) $(2,5)^2$; h) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$; i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; j) $\left(\frac{132}{131}\right)^0$;

k) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; l) $\left(\frac{13}{14}\right)^1$; m) $(0,(1))^2$; n) $(2,(6))^2$; o) $(0,1(6))^5$.

5. Scrieți, folosind o singură putere:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^7$; b) $(0,4)^3\cdot(0,4)^5$; c) $\left(2\frac{9}{7}\right)^3\cdot\left(2\frac{9}{7}\right)^{15}$; d) $(1,(6))^3\cdot(1,(6))^4$;

e) $\left(\frac{5}{7}\right)^3:\left(\frac{5}{7}\right)^2$; f) $(1,25)^4:(1,25)^2$; g) $\left[(7,1(2))^3\right]^2$; h) $\left[(0,(2))^3\right]^9$;

i) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^6$; j) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^5$; k) $\left(\frac{9}{5}\right)^{15}:\left(\frac{7}{5}\right)^{15}$; l) $\left(\frac{8}{26}\right)^3:\left(\frac{4}{13}\right)^3$.

6. Arătați că următoarele numere raționale sunt puteri ale lui $\frac{1}{2}$:

a) $\frac{1}{64}$; b) 0,125; c) $\frac{3}{24}$; d) $\frac{3}{96}$; e) 0,015625.

7. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție zecimală:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^1$; b) $\left(\frac{13}{10}\right)^{12}:\left(\frac{13}{10}\right)^{10}$; c) $(0,14)^{99}:(0,14)^{99}$;

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^5:\left(\frac{5}{4}\right)^3$; e) $\left(4\frac{1}{4}\right)^8:\left(4\frac{1}{4}\right)^7$; f) $\left(\frac{2}{9}\right)^5:(0,(2))^4$;

g) $\frac{125}{7}:\left(\frac{5}{2}\right)^2$; h) $\left(\frac{11}{13}\right)^{49}:\left(\frac{11}{13}\right)^{49}$; i) $(5,(4))^{18}:\left(\frac{49}{9}\right)^{17}$.

8. Calculați:

a) $\left(\frac{9}{13}\right)^3\cdot\left(\frac{13}{3}\right)^3$; b) $(0,0625)^5\cdot 16^5$; c) $(0,5)^3:2^3$;

d) $(0,25)^4\cdot 4^4$; e) $(0,12)^{149}\cdot\left(8\frac{1}{3}\right)^{149}$; f) $(0,8(3))^4\cdot(2,4)^4$.

9. Scrieți numărul rațional cu baza indicată:

a) $\frac{125}{8}$ cu baza $\frac{5}{2}$; b) $\frac{343}{27}$ cu baza $\frac{7}{3}$; c) 1 cu baza $\frac{2}{5}$;

d) $\frac{243}{1024}$ cu baza $\frac{3}{4}$; e) $\frac{1}{1024}$ cu baza $\frac{1}{2}$; f) 0 cu baza 0.

10. Calculați folosind regulile de calcul cu puteri:

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^{17} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{11} : \left(\frac{2}{7}\right)^{28}$; b) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{7} : \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$; c) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{4}\right]^{6} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{8} : \left(\frac{3}{5}\right)^{2^5}$;

d) $\left[\left(\frac{5}{11}\right)^{3}\right]^{15} \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^{20} : \left(\frac{5}{11}\right)^{65}$; e) $2{,}3^{19} \cdot (2{,}3^{4})^{7} : (2{,}3^{5})^{9}$; f) $(1{,}1^{3})^{5} : [1{,}1^{7} \cdot (1{,}1^{2})^{3}]$.

PE Aplicare și exersare **

11. În multe discipline științifice și inginerești se lucrează cu valori foarte mari sau foarte mici. De exemplu, masa și volumul planetei Pământ sunt:

• masa: $59742\underbrace{000000000000000000000}_{\text{20 de zerouri}}$ kg; • volumul: $1083207\underbrace{000000000000000}_{\text{15 zerouri}}$ m^3.

În ambele cazuri avem de-a face cu mulți de zero și este destul de incomod să lucrăm cu atâtea cifre. Pentru astfel de numere se folosește **scrierea științifică**, o scriere de forma $x \cdot 10^n$, unde x este o fracție zecimală, $1 \le x \le 10$, și $n \in \mathbb{N}$. Astfel, în scrierea științifică:

- masa Pământului este de $5{,}9742 \cdot 10^{24}$ kg;
- volumul Pământului este de $1{,}083207 \cdot 10^{21}$ m^3.

a) Subliniați numerele scrise folosind notația științifică:

304; $0{,}25 \cdot 10^6$; $2{,}7 \cdot 10^9$; $0{,}7 \cdot 10^6$; $324\ 000\ 000$; $1{,}341 \cdot 10$.

b) Utilizând scrierea științifică, rescrieți următoarele numere:

3124; $312{,}4$; $31{,}24$; $3{,}124$; $123\ 000\ 000$; $7\ 000\ 000\ 000$.

Rezolvare: $3124 = 3{,}124 \cdot 10^3$ (am deplasat virgula spre stânga peste 3 cifre); $123\ 000\ 000 = 1{,}23 \cdot 10^8$ (am deplasat virgula spre stânga peste 8 cifre).

c) Rescrieți următoarele numere scrise științific:

$1{,}23 \cdot 10^6$; $2{,}7 \cdot 10^5$; $1{,}2 \cdot 10^3$; $4{,}91 \cdot 10^2$; $3{,}843 \cdot 10$.

Rezolvare: $1{,}23 \cdot 10^6 = 1\ 230\ 000$ (deplasăm virgula spre dreapta peste 6 cifre).

12. Alege varianta corectă pentru scrierea științifică a numărului 45 000 000 000:

a) $45 \cdot 10^9$; b) $4{,}5 \cdot 10^{10}$; c) $0{,}45 \cdot 10^{11}$; d) $0{,}045 \cdot 10^{12}$.

Aflați numărul natural n, știind că $45\ 000\ 000\ 000 = 0{,}000045 \cdot 10^n$.

13. Scrieți sub formă de puteri cu aceeași bază:

a) 2^{16} și 8^4; b) 81^5 și 27^3; c) 125^3 și 25^6;

d) $\left(\frac{8}{27}\right)^{3}$ și $\left(\frac{4}{9}\right)^{5}$; e) $\left(\frac{125}{27}\right)^{3}$ și $\left(\frac{5}{3}\right)^{4}$; f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{3}$ și $(0,(1))^5$;

g) $[0,(1)]^5$ și $\left(\frac{1}{27}\right)^{3}$; h) $[0,1(6)]^4$ și $\frac{1}{216^2}$.

Rezolvare: Dacă baza este număr natural, o descompunem în factori primi; dacă nu este număr natural, o scriem sub forma unei fracții ireductibile $\frac{p}{q}$ și descompunem numărătorul și numitorul acesteia în factori primi.

h) $0,1(6) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}$; $\frac{1}{216^2} = \frac{1}{(2^3 \cdot 3^3)^2} = \frac{1}{2^6 \cdot 3^6} = \left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right)^{6}$.

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3^3 \\ 1 & \end{array}$$

Prin urmare: $[0,1(6)]^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^{4}$ și $\frac{1}{216^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^{6}$.

14. Scrieți ca puteri care au același exponent:

a) 4^{15} și 3^{10}; b) 5^{30} și 7^{20}; c) $(7{,}1)^{24}$ și $\left(\frac{8}{3}\right)^{36}$;

d) $(2{,}4)^{75}$ și $(8,1(3))^{50}$; e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{18}$ și $\left(\frac{3}{5}\right)^{36}$; f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{28}$ și $\left(\frac{2}{6}\right)^{21}$.

Rezolvare: f) $28 = 2^2 \cdot 7$; $21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow$ c.m.m.d.c. este 7, adică $(28, 21) = 7$.

Deci $\left(\frac{1}{5}\right)^{28} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\right]^{7} = \left(\frac{1}{625}\right)^{7}$ și $\left(\frac{2}{6}\right)^{21} = \left(\frac{1}{3}\right)^{21} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right]^{7} = \left(\frac{1}{27}\right)^{7}$.

15. Determinați numărul natural x, știind că:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{32}{243}$; b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 2{,}25$; c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x} = \frac{2}{98}$;

d) $\left(\frac{125}{50}\right)^{x} = \frac{125}{8}$; e) $\left(\frac{3}{24}\right)^{x} = 0{,}015625$.

PE Aprofundare și performanță ***

Fie $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ și $m, n \in \mathbb{N}$. Foarte utile în calcule sunt și următoarele proprietăți ale puterilor:

1. Două puteri de numere raționale pozitive care au aceeași bază sunt egale dacă și numai dacă au exponenții egali: $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$.

2. Două puteri de numere raționale pozitive care au același exponent sunt egale dacă și numai dacă au bazele egale: $a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$.

3. Dacă $0 < a < 1$, atunci: $a^m < a^n \Leftrightarrow m > n$.

Dacă $a > 1$, atunci: $a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$.

4. Dintre două puteri care au același exponent, mai mică este cea cu baza mai mică:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow a < b.$$

16. Determinați numărul natural x, știind că:

a) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{x}\right]^{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{2^7}{5^7}$; b) $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^{x}\right]^{2} : \left(\frac{9}{8}\right)^{4} = \left(\frac{9}{8}\right)^{16} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{2}$;

c) $\left[(0{,}4)^2\right]^8 = \left(\frac{6}{15}\right)^{x+13}$; d) $5^7 \cdot (0{,}2)^7 = \left(\frac{13}{11}\right)^{x} \cdot \left(\frac{11}{39}\right)^{x}$;

e) $(0,(1))^5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x} = \left(\frac{2}{18}\right)^{10}$; f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} : \left[(0{,}4)^3\right]^2 = \left(\frac{4}{10}\right)^{6}$.

17. Comparați numerele:

a) $(0{,}1)^5$ și $(0{,}001)^6$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{21}$ și $\left(\frac{8}{125}\right)^{3}$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{21}$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^{28}$;

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{8}$ și $\left(\frac{1}{27}\right)^{3}$; e) $(0,(1))^{10}$ și $\left(\frac{1}{27}\right)^{3}$.

18. Determinați numerele naturale x pentru care:

a) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \geq (0,4)^7$; b) $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x\right]^3 \cdot (2,5)^4 < \left(\frac{25}{10}\right)^9$.

19. Comparați numerele raționale pozitive și nenule a și b, știind că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\left(\frac{1}{a}\right)^n < \left(\frac{1}{b}\right)^n$.

20. Fie $\frac{a}{b}$ un număr rațional pozitiv.

a) Dacă $a < b$, demonstrați că $\left(\frac{a}{b}\right)^n < \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} < \ldots < \left(\frac{a}{b}\right)^3 < \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{b}$.

b) Dacă $a = b$, demonstrați că $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \ldots = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

c) Dacă $a > b$, demonstrați că $\frac{a}{b} < \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{a}{b}\right)^3 < \ldots < \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Rezolvare: a) Dacă $a < b \Rightarrow \frac{a}{b}$ este fracție subunitară sau altfel spus $\frac{a}{b} < 1$. Fie k un număr natural oarecare nenul. A demonstra că $\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} < \left(\frac{a}{b}\right)^k$ este echivalent cu a demonstra că $\frac{a}{b} < 1$, ceea ce este evident din enunț. (Am împărțit ambii membri prin $\left(\frac{a}{b}\right)^k$.). Analog b), c).

PE-PP Supermate ****

21. Demonstrați că nu există un număr rațional exprimat printr-o fracție zecimală finită al cărui pătrat să fie reprezentat de o fracție periodică.

22. Se consideră numerele raționale pozitive: $A = \frac{13}{26} + \frac{103}{206} + \frac{1003}{2006} + \frac{10003}{20006}$ și $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{2013}{2014}$. Calculați $B - A$.

23. Demonstrați că:

a) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{2014^2} < \frac{2013}{4028}$; b) $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{2015^2} < \frac{1}{2}$.

24. a) Verificați egalitățile: $3^2 + 4^2 = 5^2$; $5^2 + 12^2 = 13^2$.

b) Verificați dacă există numere $a, b \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$ pentru care $a^2 + b^2$ să fie număr natural. Exemplificați.

25. Calculați sumele:

a) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{43}{21^2 \cdot 22^2}$; b) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{97 \cdot 99}$.

PE-PP 9. Ordinea efectuării operațiilor

Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale au fost definite următoarele operații: adunarea, înmulțirea, scăderea, împărțirea și ridicarea la putere. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor este aceeași ca și în cazul operațiilor definite pe mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, adică:

- întâi se efectuează ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care apar, și apoi adunările și scăderile, în ordinea în care apar;
- dacă exercițiul conține paranteze, se efectuează mai întâi calculele dintre parantezele rotunde (mici), apoi cele dintre parantezele pătrate (mari) și în final cele dintre acolade.

Observație: Adunarea și scăderea sunt operații de ordinul întâi, înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul al doilea și ridicarea la putere este operație de ordinul al treilea.

Exemplu:

$$1 - \left\{0,125 + \left[\left(\frac{4}{6} - \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{2}{15} - (1,0(3) - 0,8(6))\right] : \frac{3}{2}\right\} \cdot \frac{5}{2}.$$

Notăm cu S rezultatul calculului.

- Transformăm fracțiile zecimale și pe cele ordinare în fracții ireductibile:

$$0,125 = \frac{125^{(25}}{1000} = \frac{5^{(5}}{40} = \frac{1}{8}; \frac{4^{(2}}{6} = \frac{2}{3}; 1,0(3) = 1\frac{3^{(3}}{90} = 1\frac{1}{30} = \frac{31}{30}; 0,8(6) = \frac{78^{(6}}{90} = \frac{13}{15}.$$

Rezultă: $S = 1 - \left\{\frac{1}{8} + \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{2}{15} - \left(\frac{31}{30} - \frac{13}{15}\right)\right] : \frac{3}{2}\right\} \cdot \frac{5}{2}$.

- Efectuăm calculele din parantezele rotunde (mici):

$${}^{4)}\frac{2}{3} - {}^{1)}\frac{5}{12} = \frac{8}{12} - \frac{15}{12} = \frac{3^{(3}}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16};$$

$${}^{1)}\frac{31}{30} - {}^{2)}\frac{13}{15} = \frac{31}{30} - \frac{26}{30} = \frac{5^{(5}}{30} = \frac{1}{6}.$$

Rezultă: $S = 1 - \left\{\frac{1}{8} + \left[\frac{1}{16} + \frac{2}{15} - \frac{1}{6}\right] : \frac{3}{2}\right\} \cdot \frac{5}{2}$.

- Efectuăm calculele din paranteza pătrată:

$${}^{15)}\frac{1}{16} + {}^{16)}\frac{2}{15} - {}^{40)}\frac{1}{6} = \frac{15}{240} + \frac{32}{240} - \frac{40}{240} = \frac{7}{240}.$$

Rezultă: $S = 1 - \left\{\frac{1}{8} + \frac{7}{240} : \frac{3}{2}\right\} \cdot \frac{5}{2} = 1 - \left\{\frac{1}{8} + \frac{7}{\cancel{240}_{120}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{3}\right\} \cdot \frac{5}{2} = 1 - \left\{\frac{1}{8} + \frac{7}{360}\right\} \cdot \frac{5}{2}$.

- Efectuăm calculele din acoladă:

$${}^{45)}\frac{1}{8} + {}^{1)}\frac{7}{360} = \frac{45}{360} + \frac{7}{360} = \frac{52^{(4}}{360} = \frac{13}{90}.$$

Rezultă: $S = 1 - \frac{13}{\cancel{90}_{18}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{2} = 1 - \frac{13}{36} = \frac{36}{36} - \frac{13}{36} = \frac{23}{36}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Stabiliți prima operație care trebuie efectuată și efectuați operația respectivă:

a) $4{,}2 + 1{,}3 \cdot 6$; b) $\frac{7}{5} - 0{,}(4) : 2$; c) $3\frac{1}{4} - 4 \cdot (0{,}5)^2$;

d) $\frac{3}{2} + 5 : \left(\frac{12}{5} + 0{,}(3)\right)$; e) $4 : (2{,}7 - 1{,}38)^2$.

Rezolvare: a) $1{,}3 \cdot 6 = 7{,}8$.

2. În exercițiile următoare, două operații se pot efectua simultan. Efectuați operațiile respective:

a) $\frac{2}{5} + 2^2 \cdot (3{,}5 - 0{,}4)$; b) $0{,}4 \cdot 6 + [1{,}3(18)]^0$;

c) $\frac{7}{5} + 3^2 \cdot \left(5 - 3 \cdot \frac{2}{12}\right)$; d) $1{,}2^2 + 3 \cdot [4 \cdot (3 \cdot 0{,}5 - 1)]$.

Rezolvare: d) $1{,}2^2 = 1{,}44$ și $3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$.

3. Copiați și completați cu „=" sau cu „≠" pentru a obține propoziții adevărate:

a) $(2{,}5 \cdot 4) + 0{,}5 \square 2{,}5 \cdot 4 + 0{,}5$; b) $\left(4{,}25 - \frac{1}{4}\right) : 2 \square 4{,}25 - \frac{1}{4} : 2$;

c) $6 \cdot (0{,}5)^2 \square (6 \cdot 0{,}5)^2$; d) $3 : 0{,}3 \cdot 2 \square (3 : 0{,}3) \cdot 2$;

e) $3 : 0{,}3 \cdot 3 \square 3 : (0{,}3 \cdot 3)$; f) $17 : (6 + 2) \square \frac{17}{6+2}$.

4. Efectuați calculele de la exercițiul 1.

5. Efectuați calculele de la exercițiul 2.

PE Aplicare și exersare **

6. Calculați:

a) $3 + 2 \cdot \frac{1}{5}$; b) $5 - 3 \cdot \frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$;

d) $0{,}25 : 0{,}5 \cdot \frac{1}{4}$; e) $\frac{1}{2} + 2 \cdot (0{,}25 + 3)$; f) $3{,}25 - 3\left(1{,}7 - \frac{3}{2}\right)$;

g) $\frac{5}{2} + 3^2 \cdot 0{,}25$; h) $\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{5}\right)^2$; i) $0{,}(4) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 5$;

j) $0{,}75 + 0{,}08(3) : \frac{1}{6}$; k) $0{,}6 + \frac{3}{5} : 1{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}4$.

7. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $3{,}(3) + 1{,}(3) \cdot \frac{1}{3} - 4 : \frac{9}{2}$; b) $\left(\frac{6}{10} + \frac{1}{2}\right) \cdot 5 + \frac{1}{2} : \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) + 2$;

c) $12{,}(3) \cdot 2{,}25 - 5\frac{1}{2} : 4\frac{2}{5}$; d) $\left(\frac{21}{10} + \frac{1}{2}\right) : \frac{6}{5} + \frac{6}{5} - 0{,}4$.

8. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție zecimală:

a) $1 : \left(1 : \frac{11}{30} - 1{,}5\right) + (0{,}5)^3 : 0{,}(6)$; b) $10{,}1 : \left[\left(\frac{6}{5} + \frac{13}{6}\right) \cdot \left(\frac{21}{10} + \frac{6}{13}\right)\right] : 1{,}(4)$;

c) $4{,}84 \cdot [0{,}(03)]^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} : \left[\frac{37}{3} \cdot \frac{9}{4} - 5{,}5 \cdot \frac{9}{2}\right]$.

9. Calculați:

a) $\frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{4}{3} \cdot \frac{21}{28} + 3\frac{1}{2} \cdot 7\frac{3}{5}$; b) $\left(\frac{65}{195} + \frac{108}{324} + \frac{122}{366}\right) \cdot \left(\frac{24}{168} - \frac{6}{42}\right)$;

c) $\left(3\frac{1}{4} + 1\frac{2}{7} - 1\frac{17}{28}\right) \cdot 1\frac{15}{41}$; d) $\frac{270}{63} \cdot \left(3\frac{1}{5} + 7\frac{1}{15} - 2\frac{1}{3}\right)$.

10. Calculați:

a) $\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] : \frac{3}{2}$; b) $\frac{28}{31} \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(2\frac{1}{2} - \frac{7}{4}\right) : \frac{7}{8}\right]$.

11. a) Simplificați fracțiile: $\frac{162}{270}; \frac{162}{405}; \frac{162}{360}$.

b) Calculați: $1\frac{5}{7} \cdot \left\{\frac{1}{12} + \frac{11}{15} : \left[\frac{1}{60} + 162 \cdot \left(\frac{1}{270} + \frac{1}{405} + \frac{1}{360}\right)\right]\right\}$.

Indicație: a) Descompuneți numărătorul și numitorul în factori primi.
b) Aplicați proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare.

PE Aprofundare și performanță ***

12. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$. Demonstrați că $(a + b) : c = a : c + b : c$ (împărțirea este distributivă la stânga față de adunare).

b) Demonstrați că există $a, b, c \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a : (b + c) = a : b + a : c$.

c) Demonstrați că există $a, b, c \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a : (b + c) \neq a : b + a : c$ (împărțirea nu este distributivă la dreapta față de adunare).

13. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$.

a) Explicați de ce $a : b : c = (a : b) : c$.

b) Arătați că, în general, $a : b : c \neq a : (b : c)$.

c) Demonstrați că $a : b : c = a : (b \cdot c)$.

14. Reamintim că un număr rațional a este inversabil dacă există un alt număr rațional a' astfel încât $a \cdot a' = a' \cdot a = 1$. Numărul a', dacă există, se numește **inversul** lui a și se notează cu a^{-1} sau $\frac{1}{a}$.

Arătați că, dacă a și b sunt două numere inversabile, atunci produsul lor este inversabil și $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

Calculați:

15. $21\frac{1}{5} : \left(7\frac{1}{5} - 3\frac{1}{10} + 6\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{9}\right) : \frac{1}{27}$.

16. $\frac{12}{91}\cdot\left[\frac{1}{3}+1:\left(\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}\right):\frac{7}{6}\right]+\frac{6}{13}\cdot\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right):\frac{7}{6}\right]$.

17. $\left\{\frac{8}{35}+\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{33}{35}\right)+\left(\frac{3}{14}-\frac{2}{35}\right)-\left(2-\frac{12}{7}+\frac{5}{14}\right)\right]\right\}\cdot 3\frac{1}{3}$.

18. $\dfrac{4\frac{4}{5}\cdot 4\frac{1}{6}-4\frac{2}{3}:\frac{4}{15}+16\frac{1}{2}}{9\frac{3}{7}-\frac{34}{63}\cdot 4\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{8\frac{3}{5}-2\frac{1}{5}}{19}:1\frac{1}{7}$.

19. $\dfrac{\left(2\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)\cdot 1\frac{3}{7}}{\left(5\frac{1}{5}-2\frac{2}{5}\right):2\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}+8\frac{9}{11}-\dfrac{\left(1\frac{3}{5}+\frac{11}{5}\right)\cdot\frac{10}{19}:\frac{10}{43}}{\left(\frac{12}{5}-1\frac{3}{10}\right)\cdot 4\frac{3}{10}}$.

20. $\dfrac{\left(17\frac{1}{2}-8\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{11}\right)\cdot\left(11\frac{2}{3}:2\frac{2}{9}+3\frac{1}{2}\right)}{\left(1\frac{29}{40}:2\frac{3}{10}-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(14\frac{2}{3}-51\frac{1}{5}:4\right)}:62\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}$.

PE-PP 10. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Transformaţi în fracţii zecimale: $\frac{321}{100}; \frac{4}{1000}; \frac{12}{25}; \frac{35}{9}; \frac{15}{90}$.

2. Transformaţi în fracţii ordinare ireductibile: 0,25; 3,4; 0,(3); 0,1(6); 0,(21).

3. Se consideră fracţiile $\frac{110}{176}$ şi $\frac{960}{225}$.

a) Descompuneţi în factori primi numărătorii şi numitorii fracţiilor.

b) Simplificaţi fracţiile astfel încât fracţiile rezultate să fie ireductibile.

4. Ordonaţi crescător numerele: 4,37(6); 4,(376); 4,376; 4,3(76).

5. Comparaţi numerele $\frac{3}{17}$ şi $\frac{4}{19}$ aducând fracţiile la acelaşi numărător.

6. Calculaţi:

a) $6{,}5^2$; b) $(12{,}5-5)\cdot\frac{2}{15}$; c) $\frac{5}{8}+12{,}5$.

7. Aflaţi numărul raţional x, ştiind că $x:\frac{3}{4}=\frac{16}{27}$.

8. Scrieţi partea întreagă şi partea fracţionară a numărului $a = 6{,}5^2:\left[\frac{5}{8}+(12{,}5-5)\cdot\frac{2}{5}\right]-$ $-3{,}75-2{,}75$.

9. Un autoturism parcurge într-o zi 570 km; 320 km sunt parcurşi cu un consum de 7,2 ℓ de benzină la 100 km. Pentru restul drumului se înregistrează un consum cu 0,2 ℓ de benzină mai mult la 100 km. Câţi lei a costat deplasarea cu autoturismul, dacă preţul litrului de benzină a fost de 5,50 lei?

TESTUL 2

1. Se consideră fracţiile $\frac{108}{162}$ şi $\frac{75}{25}$.

a) Descompuneţi în factori primi numărătorii şi numitorii fracţiilor.

b) Simplificaţi fracţiile astfel încât fracţiile rezultate să fie ireductibile.

2. Transformaţi în fracţii ordinare ireductibile: 0,75; 3,8; 0,(6); 0,2(7).

3. Transformaţi în fracţii zecimale: $\frac{324}{10}; \frac{14}{1000}; \frac{25}{90}; \frac{12}{18}; \frac{25}{4}$.

4. Comparaţi fracţiile $\frac{17}{7}$ şi $\frac{19}{8}$ aducându-le la acelaşi numitor.

5. Ordonaţi crescător numerele: 3,92(1); 3,(921); 3,9(21); 3,921.

6. Calculaţi:

a) $0{,}1:\frac{1}{5}$; b) $\frac{6}{17}\cdot\left(0{,}75+\frac{2}{3}\right)$; c) $\frac{6}{17}+0{,}1$;

d) $\left[\left(0{,}75+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{6}{17}+0{,}1:\frac{1}{5}\right]:0{,}(3)$.

7. Aflaţi numărul raţional x, ştiind că $\frac{4}{3}\cdot x=\frac{64}{27}$.

8. Perimetrul unui pătrat este de 6,24 m. Calculaţi aria pătratului.

9. La o patiserie se utilizează într-o zi 24 kg de făină, care reprezintă $\frac{3}{5}$ din toată cantitatea de făină aflată în depozitul patiseriei. Ce cantitate de făină se află în depozit?

TESTUL 3

1. Calculaţi: $\left[1{,}1(6)+1\frac{1}{4}:0{,}(3)\right]\cdot\left(2-\frac{4}{3}\right)^2$.

2. Calculaţi volumul unui paralelipiped dreptunghic, ştiind că lungimea este de 4,(6) m, lăţimea este de 2,5 m şi înălţimea este de 1,(714285) m.

3. Împărţiţi puterea a cincea a numărului 0,1(6) la puterea a zecea a numărului 0,(3).

4. Un dreptunghi are lungimea de 18,24 m şi lăţimea cu 2,4 m mai mică. Calculaţi aria dreptunghiului.

5. Dacă $xy = 0{,}(6)$ şi $xz = 0{,}5$, calculaţi $xy - xz$.

6. Scrieţi proprietăţile înmulţirii numerelor raţionale.

7. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{11}{2n+1} \in \mathbb{N}$.

8. Două robinete umplu împreună un bazin în 6 ore. Dacă este lăsat deschis un singur robinet, acesta umple bazinul în 10 ore. Calculați în câte ore va umple bazinul celălalt robinet.

9. Un călător a parcurs într-o zi 12 km, care reprezintă $\frac{2}{5}$ din tot drumul pe care-l are de parcurs. Câți kilometri are tot drumul?

TESTUL 4

1. Calculați:
a) numărul de 4 ori mai mare decât 2,1(6);
b) numărul de 5 ori mai mic decât 3,5.

2. Aflați $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $\frac{3}{5}<\frac{7}{x}<\frac{15}{11}$.

3. Aflați elementele mulțimii: $A=\left\{\frac{\overline{3x5}}{\overline{1y}} \mid \overline{3x5} : 3 \text{ și } \overline{1y} : 4\right\}$.

4. Simplificați fracțiile:
a) $\frac{3^{2003}+3^{2005}}{3^{2007}-3^{2005}}$; b) $\frac{2^{2007}-6\cdot 2^{2002}}{2^{2001}+2^{2003}+2^{2004}}$.

5. Calculați $2{,}5x + 0{,}4y$, înlocuind pe x cu $\frac{2}{5}$ și pe y cu $\frac{3}{4}$.

6. Calculați perimetrul și aria unui pătrat cu latura de $1\frac{3}{5}$ m.

7. Aflați numerele naturale x și y astfel încât fracțiile: $\frac{30}{x+1}$, $\frac{2y+1}{25}$ și $\frac{3}{5}$ să fie echivalente.

8. Calculați: $\left(0,(3)+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{8}:\frac{7}{12}+\frac{22}{7}\cdot\frac{3}{11}\right)$.

9. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1002}{2005}$.

PE Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Două puteri de numere raționale pozitive care au aceeași bază sunt egale dacă ....

(0,5p) **2.** Numărul 0,25 scris sub formă de putere cu baza $\frac{1}{2}$ este egal cu ....

(0,5p) **3.** Două puteri de numere raționale pozitive care au același exponent sunt egale dacă ....

(0,5p) **4.** Rezultatul calculului $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ este ......, adică ....

(0,5p) **5.** Dacă $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{2}{3}$, atunci $(4x+6y)^2$ este egal cu ....

(0,5p) **6.** Numerele $0{,}1$; $0{,}1^2$; $0{,}01^2$ scrise în ordine crescătoare sunt:............................ .

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Pătratul numărului $x=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$ este egal cu:

A. 0,001 B. 1 C. 0,1 D. 0,01

(0,5p) **2.** Rezultatul calculului $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2$ este egal cu:

A. $\frac{8}{7}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{9}{8}$ D. $\frac{8}{9}$

(0,5p) **3.** Dacă $\left(\frac{1}{2014}\right)^n=1$, atunci n este egal cu:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(0,5p) **4.** Fracția ireductibilă obținută din simplificarea fracției $\frac{7^{2015}-7^{2013}}{7^{2016}+7^{2015}}$ este egală cu:

A. $\frac{7}{6}$ B. $\frac{49}{6}$ C. $\frac{6}{49}$ D. $\frac{6}{7}$

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(0,5p) **1.** Determinați numărul natural x din egalitatea: $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]^{10}=\left[\left(\frac{4}{9}\right)^5\right]^x$.

(1,5p) **2.** Calculaţi:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2014} : \left(\frac{2}{5}\right)^{2013}$; c) $\left(3-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

(1p) **3.** Calculaţi: $\left(1\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right)^2 \cdot 9^2 - \left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)^2 : \left(1-\frac{8}{9}\right)^2$.

(1p) **4.** La un atelier de croitorie, dintr-un balot de stofă de 540,85 m se confecţionează 150 de pantaloni şi 80 de costume. Câtă stofă rămâne, dacă pentru un pantalon se foloseşte $1\frac{1}{5}$ m, iar pentru un costum $2\frac{3}{10}$ m?

PE-PP 11. Media aritmetică ponderată a unor numere raţionale pozitive

Media aritmetică şi **media aritmetică ponderată** a două sau mai multe numere raţionale se calculează ca şi în cazul în care numerele sunt naturale.

Exemplu: Un fermier trimite la o piaţă agroalimentară legume: varză, cartofi şi fasole la următoarele preţuri:

- varză: 1,40 lei kilogramul;
- cartofi: 2,80 lei kilogramul;
- fasole: 4,50 lei kilogramul.

a) Care este preţul mediu al unui kilogram de legume?

b) Dacă o gospodină cumpără 3 kg de varză, 5 kg de cartofi şi 2 kg de fasole, care este costul mediu pentru kilogramul de legume achiziţionate de gospodină?

Rezolvare: Pentru 3 kg de legume (1 kg de varză + 1 kg de cartofi + 1 kg de fasole), preţul este (1,40 + 2,80 + 4,50) lei, adică 8,70 lei. Deci preţul unui kilogram de legume este de $\frac{8,70}{3}$ lei, adică 2,90 lei. Acesta este preţul mediu al unui kilogram de legume şi este **media aritmetică** a numerelor raţionale 1,40; 2,80 şi 4,50:

$$m_a = \frac{1,40+2,80+4,50}{3} = \frac{8,70}{3} = 2,90.$$

b) Pentru 10 kg de legume (3 kg de varză + 5 kg de cartofi + 2 kg de fasole), costul este (3 · 1,40 + 5 · 2,80 + 2 · 4,50) lei, adică 27,20 lei. Deci costul unui kilogram de legume este de $\frac{27,20}{10}$ lei, adică 2,72 lei şi este **media aritmetică ponderată** a numerelor 1,40; 2,80 şi 4,50 cu **ponderile** 3, 5 şi respectiv 2:

$$m_{ap} = \frac{1,40\cdot 3+2,80\cdot 5+4,50\cdot 2}{3+5+2} = \frac{27,20}{10} = 2,72.$$

În general:

1. Fiind date n numere raţionale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se numeşte **medie aritmetică** raportul dintre suma numerelor şi numărul numerelor; se notează cu m_a şi

$$m_a = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

2. Fiind date n numere raţionale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, se numeşte **medie aritmetică ponderată** numărul notat cu m_{ap} definit de egalitatea:

$$m_{ap} = \frac{a_1\cdot p_1+a_2\cdot p_2+\ldots+a_n\cdot p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

Observaţie:

Media aritmetică, respectiv media aritmetică ponderată, a mai multor numere raţionale pozitive are următoarele proprietăţi:

1. este un număr raţional;
2. este mai mică sau egală cu cel mai mare dintre numere;
3. este mai mare sau egală cu cel mai mic dintre numere.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Calculaţi media anuală a lui Andrei, ştiind că are următoarele medii:
7,50; 8; 9; 8,50; 7; 10; 10; 9; 8; 9; 8,50; 9.

2. a) Suma a trei numere este $\frac{9}{5}$. Calculaţi media lor aritmetică.

b) Media aritmetică a trei numere este $\frac{5}{3}$. Calculaţi suma numerelor.

3. Un elev cumpără 4 caiete cu 1 leu bucata şi 10 caiete cu 1,5 lei bucata. Cât a costat în medie un caiet?

4. Calculaţi media ponderată a numerelor:

a) 1,(3) şi $3\frac{1}{3}$ cu ponderile 3 şi respectiv 6;

b) $\frac{1}{2}$; 1,3(8) şi 0,(3) cu ponderile 1, 9 şi respectiv 6.

5. Calculaţi media ponderată a numerelor:

a) 2 şi 3 cu ponderile 3 şi 8; b) $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ cu ponderile 4 şi 6;

c) $\frac{3}{20}$; $\frac{1}{5}$; 1 şi 3 cu ponderile 4; 2; 3 şi 5.

6. a) Calculaţi media aritmetică ponderată a numerelor 5 şi $\frac{1}{5}$ cu ponderile 4 şi 5.

b) Calculaţi media aritmetică ponderată a numerelor $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{3}{5}$ şi $\frac{1}{6}$ cu ponderile 2; 4; 5 şi 6.

PE Aplicare şi exersare **

7. Ştiind că y este media aritmetică a numerelor x şi z, cu $x < z$, scrieţi numerele x, y şi z în ordine descrescătoare.

8. Media aritmetică a trei numere raţionale pozitive este $\frac{17}{36}$. Suma a două dintre ele este $\frac{7}{12}$. Calculaţi celălalt număr.

9. Media aritmetică a trei numere este $37\frac{1}{3}$, iar media aritmetică a ultimelor două numere este 54. Aflaţi numerele, ştiind că al treilea este cu 44 mai mare decât al doilea.

10. Şerban a cumpărat pentru o petrecere 3 kg de bomboane cu 5 lei kilogramul, 6 kg de bomboane cu 4 lei kilogramul şi 5 kg de bomboane cu 6 lei kilogramul.
Câţi lei costă în medie un kilogram de bomboane?

11. S-a recoltat floarea-soarelui de pe 3 parcele după cum urmează: prima parcelă are o suprafaţă de 5 ha, a doua are o suprafaţă de 3 ha şi a treia are o suprafaţă de 10 ha. De pe prima parcelă s-au strâns câte 4 000 kg la hectar, de pe a doua câte 3 800 kg la hectar, iar de pe a treia câte 4 600 kg.
Câte kilograme de floarea-soarelui s-au strâns în medie la hectar?

12. Media aritmetică a două numere raţionale pozitive este 0,75 şi un al treilea număr este 1,5. Calculaţi media aritmetică a celor trei numere.

13. Media aritmetică a numerelor a şi b este $\frac{27}{10}$, media aritmetică a numerelor b şi c este $\frac{23}{10}$ şi media aritmetică a numerelor a şi c este 1.

a) Calculaţi media aritmetică a numerelor a, b şi c.

b) Cu cât se modifică media aritmetică a numerelor a, b şi c dacă se mai adaugă numărul 6?

PE Aprofundare şi performanţă ***

14. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2008}$ este 3. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2012}$ este 6. Calculaţi media aritmetică a numerelor $a_{2009}, a_{2010}, a_{2011}, a_{2012}$.

15. Calculaţi media aritmetică a numerelor:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} \text{ şi } b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2010}{2011}.$$

16. Fie a, b, p şi q numere raţionale pozitive, cu $a < b$. Ordonaţi crescător numerele a, b, r, s, t, ştiind că $r = \frac{ap+bq}{p+q}$, $s = \frac{a}{2} + \frac{ap+bq}{2(p+q)}$, $t = \frac{b}{2} + \frac{ap+bq}{2(p+q)}$. Justificaţi răspunsul.

17. Calculaţi media aritmetică ponderată a numerelor 12,5; $7\frac{5}{12}$ şi $\frac{3}{4}$, care au respectiv ponderile: x^2, $x + 4$ şi $4x^2 + 4$, suma ponderilor fiind 30, iar $x \in \mathbb{N}$.

18. Un fermier sortează legumele produse în: 60 kg de legume de calitatea I şi 40 kg de legume de calitatea a II-a. Preţul legumelor pe piaţă este de 4,60 lei kilogramul pentru legumele de calitatea I şi de 3,60 lei kilogramul pentru legumele de calitatea a II-a. Fermierul se gândeşte că dacă ar amesteca legumele şi le-ar vinde cu preţul mediu de $\frac{4{,}60+3{,}60}{2} = 4{,}10$ lei kilogramul, suma de bani rezultată din vânzare ar fi aceeaşi.

a) Efectuaţi calculele şi arătaţi că fermierul nu are dreptate.

b) Calculaţi pierderea suferită de fermier.

c) Calculaţi preţul mediu corect pentru kilogramul de legume rezultat prin amestecarea celor două sortimente de legume.

d) Precizați situația în care prețul mediu stabilit de fermier ar fi putut aduce acestuia o sumă de bani în plus.

Rezolvare: d) Notăm cu c_1, respectiv c_2 cantitatea de legume de calitatea I, respectiv de calitatea a II-a. Atunci:

$$c_1 \text{ kg} \times 4{,}60 \text{ lei/kg} = c_1 \cdot 4{,}60 \text{ lei}$$
$$\underline{c_2 \text{ kg} \times 3{,}60 \text{ lei/kg} = c_2 \cdot 3{,}60 \text{ lei}}$$
$$\text{Total} = (c_1 \cdot 4{,}60 + c_2 \cdot 3{,}60) \text{ lei} = s \text{ lei}$$

Amestecând cantitățile c_1 și c_2, kilogramul de amestec se va vinde cu $\frac{4{,}60+3{,}60}{2}$ lei kilogramul

$$\Rightarrow (c_1 + c_2) \text{ kg} \times 4{,}10 \text{ lei/kg}$$
$$\Rightarrow (c_1 + c_2) \cdot 4{,}10 \text{ lei/kg} = S \text{ lei}$$

Dorim ca $S > s$, echivalent:
$(c_1 + c_2) \cdot 4{,}10 > 4{,}60c_1 + 3{,}60c_2 \Leftrightarrow c_1 \cdot 4{,}10 + c_2 \cdot 4{,}10 > 4{,}60c_1 + 3{,}60c_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c_2 \cdot 4{,}10 - c_2 \cdot 3{,}60 > c_1 \cdot 4{,}60 - c_1 \cdot 4{,}10 \Leftrightarrow c_2 \cdot (4{,}10 - 3{,}60) > c_1 \cdot (4{,}60 - 4{,}10) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c_2 \cdot 0{,}50 > c_1 \cdot 0{,}50 \Leftrightarrow c_2 > c_1$.

Prin urmare, prețul mediu stabilit de fermier îi aduce acestuia o sumă de bani în plus dacă și numai dacă $c_2 > c_1$, deci cantitatea de legume de calitatea a II-a, vândută la un preț mai mic, să fie mai mare decât cantitatea de legume de calitatea I, vândută la un preț mai mare.

PE-PP Supermate ****

19. Se consideră șirul de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că $a_1 = 0$ și a_n este media aritmetică a numerelor a_{n-1} și 2012, pentru orice n natural, cu $n \geq 2$. Dacă S_n este suma primilor n termeni ai șirului, arătați că $S_{2012} + a_{2012}$ poate fi scris ca produsul a două numere naturale consecutive.

Cristian Grecu

20. Aflați media aritmetică a numerelor:

$$x = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2011\cdot 2012} \text{ și } y = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2012}\right).$$

Constantin Fudulică

21. a) Fie numerele raționale strict pozitive a, b, c, d care verifică relația:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{b+c+d}{a} = \frac{c+d+a}{b} = \frac{d+a+b}{c}.$$

Arătați că oricare dintre ele este media aritmetică a celorlalte trei.

b) Dacă a, b, c, d sunt numere naturale nenule și $abc + abd + acd + bcd = abcd$, calculați $\frac{a+2012}{a} + \frac{b+2012}{b} + \frac{c+2012}{c} + \frac{d+2012}{d}$.

Mircea Stoichițoiu

22. Se consideră mulțimea $M = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x = \overline{0,abc} \text{ și } \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{6}\right\}$. Calculați media aritmetică a numerelor din mulțimea M.

Maranda Linț și Dorin Linț, Deva

Rezolvare: Dubla inegalitate care este îndeplinită de x este: $\frac{2}{3} \leq \frac{\overline{abc}}{1000} \leq \frac{5}{6} \Leftrightarrow 1000 \cdot \frac{2}{3} \leq \overline{abc} \leq 1000 \cdot \frac{5}{6} \Leftrightarrow 666\frac{2}{3} \leq \overline{abc} \leq 833\frac{1}{3}$. Deoarece $\overline{abc} \in \mathbb{N}$, se obține că $\overline{abc} \in \{667, 668, \ldots, 833\}$

și $\overline{0,abc} \in \{0{,}667; 0{,}668; \ldots; 0{,}833\}$. Mulțimea M conține $833 - 666 = 167$ (elemente) și card $M = 167$. Suma elementelor mulțimii M este: $S = \frac{667}{1000} + \frac{668}{1000} + \ldots + \frac{833}{1000} = \frac{1}{1000} \cdot (667 + 668 + \ldots + 833) = \frac{1}{1000} \cdot [(1 + 2 + 3 + \ldots + 883) - (1 + 2 + \ldots + 666)] =$

$= \frac{1}{1000} \cdot \left[\frac{833\cdot 834}{2} - \frac{666\cdot 667}{2}\right] = \frac{125250}{1000} = \frac{501}{4}$. Media aritmetică este:

$$m_a = \frac{S}{\text{card } M} = S \cdot \frac{1}{\text{card } M} = \frac{501}{4} \cdot \frac{1}{167} = \frac{3}{4}.$$

PE-PP 12. Ecuații în mulțimea numerelor raționale pozitive

În multe activități desfășurate de oameni, de natură științifică, tehnică, economică etc., unele dintre aspectele urmărite sunt elucidate cu ajutorul **ecuațiilor.** De aceea studiul ecuațiilor devine o necesitate.

Dându-se numerele raționale a, b, c, cu $a \neq 0$, găsiți numerele raționale x pentru care: $a \cdot x + b = c$.

Uzual, această problemă se formulează mai scurt astfel:

Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația $a \cdot x + b = c$.

x se numește **necunoscuta** ecuației, iar un număr x_0 pentru care $a \cdot x_0 + b = c$ se numește **soluție** a ecuației.

A rezolva o ecuație înseamnă a găsi mulțimea soluțiilor ecuației.

Mulțimea soluțiilor unei ecuații se notează cu S.

Cum rezolvăm în $\mathbb{Q}$ ecuația $ax + b = c$?

- punem în evidență termenul care conține necunoscuta: $a \cdot x = c - b$
- calculăm diferența $c - b$: $c - b = d$
- rescriem ecuația: $a \cdot x = d$
- punem în evidență factorul x: $x = d : a$
- mulțimea soluțiilor ecuației este: $S = \left\{\frac{d}{a}\right\}$

Exemplu: $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{7}{3} - 0{,}3$.

Efectuăm calculele: $\frac{7}{3} - 0{,}3 = \frac{7}{3} - \frac{3}{10} = \frac{70-9}{30} = \frac{61}{30}$.

Rezultă: $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{61}{30}$.

În acest produs, punem în evidență factorul x:

$$x = \frac{61}{30} : \frac{1}{2}.$$

Efectuăm calculul: $\frac{61}{30} : \frac{1}{2} = \frac{61}{30} \cdot 2 = \frac{61}{15} = 4{,}0(6)$.

Rezultă $x = 4,0(6)$, ceea ce arată că $4,0(6)$ este soluția ecuației și că ecuația nu mai are alte soluții. Notând cu S mulțimea soluțiilor ecuației, rezultă $S = \{4,0(6)\}$.

Observație: Rezolvarea unei ecuații presupune utilizarea corectă a regulilor de calcul, inclusiv ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor. Reamintim câteva dintre ele:

1. În egalitatea $a + b = s$ putem pune în evidență orice termen al sumei:
   - punem în evidență termenul a:
   $$a = s - b;$$
   - punem în evidență termenul b:
   $$b = s - a.$$

Reținem! Punem în evidență un termen al sumei astfel: din sumă se scade celălalt termen. Egalitățile sunt echivalente:

$$a + b = s \Leftrightarrow a = s - b \Leftrightarrow b = s - a.$$

2. În egalitatea $a - b = d$ putem pune în evidență **descăzutul**, $a = d + b$, sau **scăzătorul**, $b = a - d$. Egalitățile sunt echivalente:
$$a - b = d \Leftrightarrow a = d + b \Leftrightarrow b = a - d.$$

3. Dacă $a, b, p \in \mathbb{Q}^*$, în egalitatea $a \cdot b = p$ putem pune în evidență fiecare factor al produsului împărțind produsul la celălalt factor. Egalitățile sunt echivalente:
$$a \cdot b = p \Leftrightarrow a = p : b \Leftrightarrow b = p : a.$$

4. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$, în egalitatea $a : b = c$ putem pune în evidență **deîmpărțitul**, $a = b \cdot c$, sau **împărțitorul**, $b = c : a$. Egalitățile sunt echivalente:
$$a : b = c \Leftrightarrow a = b \cdot c \Leftrightarrow b = c : a.$$

5. La o egalitate se poate aduna sau scădea un termen:
$$a = b \mid \pm t \Leftrightarrow a \pm t = b \pm t.$$

6. O egalitate poate fi înmulțită sau împărțită cu un factor nenul:
$$a = b \mid \cdot\, m \Leftrightarrow a \cdot m = b \cdot m$$
sau
$$a = b \mid : m \Leftrightarrow a : m = b : m, m \neq 0.$$

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Arătați că numărul indicat este soluție a ecuației:

a) $10 \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x - 4 : \frac{9}{2} = 3 - \frac{4}{3}$; $\mathbf{\frac{1}{3}}$; b) $12\frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{4} = \frac{56}{6} + 5\frac{1}{2} : 4\frac{2}{5}$; **2**;

c) $x + \left(2,1 + \frac{1}{2}\right) : x - 0,4 = 19$; **1,2**.

2. Arătați că numerele indicate sunt soluții ale ecuației:

a) $x^2 - 0,(3) \cdot x = \frac{2}{5} \cdot x - \frac{2}{15}$; **0,(3)** și $\mathbf{\frac{2}{5}}$;

b) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left[\frac{8}{15} - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)x + x^2\right] = 0$; $\mathbf{\frac{1}{3}}$, $\mathbf{\frac{2}{3}}$ și $\mathbf{\frac{4}{5}}$.

3. Alegeți la întâmplare trei numere raționale pozitive și verificați că ele sunt soluții ale ecuației: $\frac{1}{2}\left(x + \frac{13}{5}\right) - \frac{1}{2} \cdot 0,4 = x \cdot 0,2 + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : \frac{6}{5}$.

4. Rezolvați ecuațiile:

a) $x + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$; b) $\frac{3}{7} + x = \frac{4}{7}$; c) $\frac{3}{7} - \frac{2}{35} = x$; d) $2\frac{1}{5} + x = 3\frac{1}{7}$;

e) $7\frac{1}{3} - x = 3\frac{1}{7}$; f) $\frac{5}{12} = \frac{26}{15} - x - \frac{19}{60}$; g) $x - \frac{8}{3} = \frac{1}{24}$.

5. Rezolvați ecuațiile:

a) $4 \cdot x = 8$; b) $4 \cdot x = 2$; c) $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{4}{9}$; d) $\frac{5}{7} \cdot x = 1$;

e) $\frac{7}{5} : x = 1$; f) $\frac{1}{4} : x = \frac{3}{4}$; g) $\frac{1}{4} : x = 3$; h) $\frac{1}{2} \cdot x = 2$.

6. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{5}{7} : \square = 10$; b) $\square : \frac{1}{15} = \frac{3}{11}$; c) $17\frac{1}{2} : \square = 3\frac{1}{2}$;

d) $4\frac{1}{11} : \square = 1\frac{4}{11}$; e) $\square : 14 = 5\frac{1}{7}$; f) $\frac{226}{125} : \square = \frac{339}{125}$.

7. Rezolvați ecuațiile:

a) $x + \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$; b) $\frac{12}{17} - x = \frac{15}{34}$; c) $x - \frac{8}{3} = \frac{1}{24}$;

d) $\frac{85}{21} - x = 3$; e) $\frac{6}{35} + x = \frac{2}{7}$; f) $4\frac{2}{3} + x = 7$;

g) $3\frac{x}{3} - \frac{7}{3} = 1\frac{1}{3}$; h) $2x + 12\frac{0}{7} = 26$; i) $324\frac{1}{7} - 4\frac{x}{14} = 156$.

PE Aplicare și exersare **

8. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{5}{2}x + 3 = 10,75$; b) $3 \cdot x - 2,7 = 1,11$; c) $0,25x + 1 = \frac{3}{2}$;

d) $\frac{1}{9} \cdot x - 3 = 5,25$; e) $0,(2)x + 3,5 = 3,75$; f) $\frac{2}{3}x - 2 = 0,(3)$;

g) $\frac{3}{5}x + 1\frac{2}{9} = 2\frac{1}{3}$; h) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{2} = 1,25$; i) $1,5 + \frac{1}{4}x = 4$;

j) $0,5x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

9. Rezolvați ecuațiile:

a) $7\left(x + \frac{1}{5}\right) = 1\frac{3}{4}$; b) $1,5\left(x + \frac{2}{9}\right) = 2,25$; c) $\frac{14}{9}(x - 1) = \frac{7}{4}$;

d) $\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{7}\right)=15$; e) $\frac{6}{5}(x-0,5)=12$; f) $\frac{3}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{14}$.

10. Rezolvați ecuațiile:

a) $7 \cdot x - 8 = 13$; b) $\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\cdot x=\frac{1}{4}$; c) $\frac{2}{5}\cdot x-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$;

d) $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot(2x-1)=2x-\frac{1}{8}\cdot(8x-1)-\frac{1}{4}\cdot(4x-2)$.

11. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{4}+\frac{1}{3}=\frac{x+5}{8}+1\frac{7}{12}$; b) $\frac{x+1}{2}+\frac{2x+6}{3}=\frac{3x+21}{5}$.

PE Aprofundare și performanță ***

12. Dacă m este un număr natural dat, rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuațiile:

a) $3x = mx + 6 - 2m$; b) $\frac{5}{2}x=\frac{m}{2}x+7$;

c) $1{,}5x = 3 - m + 0{,}5m$; d) $\frac{m}{3}x=\frac{4}{3}+5$.

Rezolvare: a) Punem în evidență termenul $(6 - 2m)$; obținem $6 - 2m = 3x - mx$. Dăm factor comun pe 2, respectiv pe x; obținem: $2(3 - m) = (3 - m)\cdot x \Leftrightarrow (3 - m)\cdot x = 2(3 - m)$.
Dacă $m > 3$, ecuația nu are soluții (scăderea $3 - m$ nu se poate efectua);
Dacă $m = 3$, ecuația se rescrie: $0 \cdot x = 2 \cdot 0$ sau $0 \cdot x = 0$, deci orice număr rațional pozitiv este soluție a ecuației.
Dacă $m < 3$, în produsul $(3 - m)\cdot x = 2(3 - m)$ punem în evidență factorul x; rezultă:

$$x=\frac{2(3-m)}{3-m}.$$

Simplificăm fracția prin $3 - m$ și obținem $x = 2$.

13. Dacă p, q, r și s sunt numere naturale date, rezolvați ecuația: $x^2-\frac{p}{q}\cdot x=\frac{r}{s}\cdot x-\frac{pr}{qs}$

14. Determinați numărul rațional m astfel încât ecuația: $x^2-m\cdot x=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}m$ să aibă:

a) două soluții distincte; b) o singură soluție.

PE-PP Supermate ****

15. Determinați pe x și y numere naturale nenule pentru care $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

16. Aflați x astfel încât: $x:\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{2013}}\right)=\frac{2^{2013}-1}{2^{2013}}$.

17. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+...+\frac{x+99}{100}=3^2\cdot 11$;

b) $\frac{x-7}{2013}+\frac{x-3}{2017}=\frac{x-2013}{7}+\frac{x-2017}{3}$.

18. Aflați numărul natural x care verifică egalitatea: $\frac{2007}{x+1}+\frac{2008}{x+2}+...+\frac{2016}{x+10}=10$.

Concursul interjudețean „Mathematica – modus vivendi", 2006

19. Aflați numerele naturale x și y, știind că: $\frac{x^2y+xy^2}{2}+\frac{36}{(x-1)(y+25)}=144$.

Olimpiada județeană, Brașov, 2006

Rezolvare: Avem că $\frac{x^2y+xy^2}{2}=\frac{xy(x+y)}{2}$. Cum x și y sunt numere naturale, dacă x este par sau y este par, atunci xy este par și $\frac{x^2y+xy^2}{2}\in\mathbb{N}$.

Dacă x și y sunt impare, atunci suma lor este număr par, adică $2 \mid (x + y)$ și $\frac{x^2y+xy^2}{2}\in\mathbb{N}$.

Cum $144 \in \mathbb{N}$ și $\frac{x^2y+xy^2}{2}\in\mathbb{N}$, rezultă că $\frac{36}{(x-1)(y+25)}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow(x-1)(y+25)\mid 36$ (1).

Cum $y\in\mathbb{N}\Rightarrow y+25\geq 25\overset{(1)}{\Rightarrow} y+25=36$ și $x-1=1$, adică $x = 2$ și $y = 11$. Prin verificare se obține: $\frac{2^2\cdot 11+2\cdot 11^2}{2}+\frac{36}{36}=\frac{44+242}{2}+1=\frac{286}{2}+1=144$. Deci $x = 2$ și $y = 11$ verifică relația din enunț.

PE-PP 13. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

Multe probleme pot fi rezolvate mai simplu cu ajutorul ecuațiilor.

Etapele rezolvării problemelor cu ajutorul ecuațiilor:
1. Alegerea necunoscutei și notarea acesteia
2. Obținerea ecuației din datele și relațiile din problemă
3. Rezolvarea ecuației
4. Interpretarea rezultatului/rezultatelor și formularea răspunsului
5. Proba și verificarea răspunsului

Exemplu:

Două terenuri au suprafețele dreptunghiuri cu o latură comună. Primul teren are o a doua latură cu 0,5 m mai mică decât latura comună, iar al doilea teren are o a doua latură de 400 m. Calculați dimensiunile laturilor celor două terenuri dacă primul are o suprafață cu 200 m² mai mică decât suprafața celui de-al doilea teren.

Rezolvare		Etapele rezolvării
Notăm cu x lungimea laturii comune	←	1. alegerea necunoscutei
• dimensiunile laturilor primului teren: x, respectiv $x - 0{,}5$ (m) • dimensiunile laturilor terenului al doilea: x, respectiv 400 (m) • suprafața primului teren: $S_1 = x\cdot(x - 0{,}5)$ m²	←	2. obținerea ecuației

• suprafața terenului al doilea: $S_2 = 400 \cdot x\ m^2$ • suprafața S_1 este mai mică cu 200 m^2 decât suprafața S_2, adică $S_1 = S_2 - 200$; rezultă ecuația: $x \cdot (x - 0{,}5) = 400 \cdot x - 200$	
$x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 400\left(x - \frac{200}{400}\right)$; $x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 400\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - 400\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$. Scoatem factor comun pe $\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Rezultă: $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 400) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $x = 400$.	← 3. rezolvarea ecuației
Cazul 1: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ latura comună are 0,5 m și dimensiunile primului teren ar fi de 0,5, respectiv 0 m, absurd. **Cazul 2:** $x = 400 \Rightarrow$ latura comună are 400 m: • primul teren are dimensiunile de 400, respectiv 395,5 m; • al doilea teren are dimensiunile de 400 m, respectiv 400 m (este pătrat).	← 4. interpretarea rezultatelor

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Aflați numărul care adunat cu 6,5 este 74,5.

2. Triplul unui număr, micșorat cu $4\frac{7}{10}$, este 4,7. Aflați numărul.

3. Care este numărul rațional care împărțit la $\frac{15}{2}$ dă ca rezultat media aritmetică a numerelor 6,2 și 16,3?

4. Aflați un număr știind că înmulțindu-l cu $\frac{2}{5}$ obținem același rezultat ca atunci când scădem 30 din el.

5. Un obiect costă cu 18 lei mai mult decât înainte de scumpire. Dacă $\frac{1}{5}$ din actualul preț reprezintă $\frac{1}{3}$ din vechiul preț, determinați prețul vechi și actualul preț al obiectului.

6. După ce parcurge $\frac{3}{5}$ dintr-un traseu și încă 40 km, lungimea drumului parcurs de un automobil măsoară 160 km. Care este lungimea traseului?

7. Pentru 6 ℓ de ulei, 4 kg de mălai și 10 kg de roșii s-a plătit 72 lei. Dacă 1 ℓ de ulei costă 4,50 lei, iar 1 kg de roșii costă 3,30 lei, calculați prețul unui kilogram de mălai.

PE Aplicare și exersare **

8. Într-o zi s-a recoltat $\frac{1}{2}$ din suprafața cultivată, a doua zi $\frac{1}{3}$ din rest, a treia zi $\frac{1}{4}$ din noul rest, iar a patra zi ultimele 10 ha. Ce suprafață a fost cultivată?

9. Stabiliți ce oră a zilei este dacă a trecut $\frac{1}{3}$ din ceea ce a rămas din zi. Dar dacă a trecut $\frac{3}{5}$ din ce a mai rămas?

10. O persoană cumpără cu $\frac{3}{7}$ din suma pe care o avea un aparat de radio și cu $\frac{3}{8}$ din suma rămasă un tablou. După ce mai cheltuiește 75 de lei, constată că i-au mai rămas 25 de lei. Calculați ce sumă a avut inițial, costul tabloului și al aparatului de radio.

11. Un copil are cu 80 de lei mai mult decât altul. Dacă primul îi dă celui de-al doilea 60 de lei, atunci primul va avea 3/4 din noua sumă a celui de-al doilea copil. Câți lei a avut la început fiecare copil?

12. Un vânzător vinde într-o zi $\frac{3}{4}$ din cantitatea de cartofi avută în depozit. Dacă în ziua respectivă ar fi vândut cu 20 kg mai puțin, cantitatea vândută în acea zi ar fi fost de 250 kg. Ce cantitate de cartofi a avut vânzătorul în depozit?

13. Suma a trei numere este 603. Câtul dintre al doilea și primul este de $\frac{1}{3}$, iar al treilea număr reprezintă $\frac{7}{45}$ din primul. Aflați cele trei numere.

14. Alexandra se gândește la un număr. Adună dublul numărului cu 0,6. Rezultatul îl împarte la 0,4. Din noul rezultat scade 21,83 și obține 20,17. Care este numărul la care s-a gândit Alexandra?

PE Aprofundare și performanță ***

15. Un grup de 50 de excursioniști este format din copii, femei și bărbați. Bărbații sunt de două ori mai mulți decât femeile, iar dublul numărului de femei este cu 10 mai mic decât numărul copiilor. Aflați numărul copiilor, femeilor și bărbaților din grup.

16. Determinați numărul rațional reprezentat de fiecare din fracțiile $\frac{x}{5}, \frac{y}{15}, \frac{z}{25}$ (unde $x, y, z \in \mathbb{N}^*$), știind că $3x + 5y + 7z = 43$.

17. Alexandra, Mihaela și Costin cumpără portocale. Alexandra cumpără 6,40 kg, Mihaela 4,80 kg, iar Costin 3,60 kg. Jumătate din suma plătită la casă de Alexandra și Mihaela este cu 4,50 lei mai mult decât suma plătită de Costin. Aflați cât costă kilogramul de portocale.

18. Compuneți o problemă prin rezolvarea căreia să ajungeți la ecuația:

$$4x + 3(2x - 4) = 88.$$

14. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Arătaţi că fracţia: $\frac{2n+7}{n+3}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2. Efectuaţi:

a) $2\frac{4}{5}\cdot\left(2\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{63}-\frac{14}{15}:1\frac{3}{25}\right)$; b) $\left[\left(\frac{7}{15}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right):\frac{5}{12}\right]\cdot\frac{2}{7}$.

3. Fie mulţimea $M=\left\{0;\frac{2}{5};1;0,(3);3\right\}$. Care dintre elementele mulţimii M sunt soluţii ale ecuaţiei: $\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$?

4. Calculaţi:

a) $\frac{7}{12}$ din 480; b) $\frac{15}{51}$ din $\frac{68}{5}$; c) $2\frac{1}{5}$ din $\frac{25}{11}$.

5. Aflaţi $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{1}{3}<\frac{2}{x-1}\le\frac{8}{3}$.

6. Din suma economisită, un elev a cheltuit în prima zi $\frac{1}{25}$; a doua zi a cheltuit $\frac{1}{3}$ din suma rămasă, a treia zi a cheltuit $\frac{1}{4}$ din noul rest, rămânându-i pentru a patra zi suma de 18 lei. Ce sumă a avut iniţial şi cât a cheltuit în fiecare zi?

TESTUL 2

1. Aduceţi la acelaşi numitor fracţiile: $\frac{1}{32};\frac{5}{48};\frac{7}{40};\frac{11}{36}$.

2. Calculaţi:

a) $\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{4}+\frac{2^3}{40}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^2$; b) $\frac{20^8}{21^3}\cdot\frac{14^5}{45^6}\cdot\frac{189^4}{140^3}:\frac{2^6}{5^6}\cdot\frac{3^3}{2^4\cdot7^3\cdot10^5}$.

3. a) Arătaţi că $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}$, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi: $\frac{4}{1\cdot5}+\frac{4}{5\cdot9}+\frac{4}{9\cdot13}+...+\frac{4}{2004\cdot2008}$.

4. Se consideră numerele raţionale pozitive:

$A=\frac{12}{48}+\frac{102}{408}+\frac{1002}{4008}+\frac{10002}{40008}$ şi $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2004}{2005}$.

Calculaţi: $B-A$, A^B, $(B-2000)^{A+1}$.

5. După ce a parcurs $\frac{1}{5}$ din drum, un călător a constatat că mai are de parcurs încă 22,5 km până să ajungă la jumătatea drumului. Care este lungimea drumului şi cât mai are de parcurs?

6. Aflaţi cifrele x şi y astfel încât fracţia $\frac{\overline{71x}}{\overline{xy}}$ să se simplifice prin 12.

TESTUL 3

1. Efectuaţi: $\left\{3\frac{3}{4}\cdot\left[\left(7\frac{8}{21}-5\frac{1}{4}\cdot1\frac{13}{35}\right):2\frac{10}{14}\right]+1\frac{2}{3}\right\}:2\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{2}$.

2. a) Ordonaţi crescător: $\frac{1}{36};\frac{1}{180};\frac{1}{45}$.

b) Aduceţi fracţiile de la a) la acelaşi numitor.

3. Calculaţi $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$ şi $a:b$ pentru:

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6} \text{ şi } b=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}.$$

4. Se consideră mulţimea $M=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid\frac{1}{3}\le x<4\right\}$. Rezolvaţi în mulţimea M ecuaţiile:

a) $6x+2=5x+3$; b) $3\left(x+\frac{1}{2}\right)+4x=7x+1\frac{1}{2}$; c) $x:\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=7,3$.

5. Fie mulţimea $M=\left\{\frac{1}{2};\frac{12}{15};\frac{2}{3};\frac{1}{7};\frac{5}{6}\right\}$. Determinaţi mulţimile:

$A=\{x \mid x\in M$ şi x se transformă în fracţie zecimală finită$\}$;
$B=\{x \mid x\in M$ şi x se transformă în fracţie zecimală periodică$\}$.

6. Aflaţi $x \in \mathbb{N}$ astfel încât:

a) $\frac{17}{2x+1}$ să fie supraunitară; b) $\frac{12}{3x+1}$ să fie număr natural.

TESTUL 4

1. Simplificaţi fracţia: $\frac{2^n\cdot3^{n+1}+2^{n+2}\cdot3^n}{3^n\cdot5^{n+1}+3^{n+2}\cdot5^n}$.

2. Efectuaţi:

a) $\left(1\frac{7}{18}\cdot\frac{8}{75}+1\frac{7}{8}\cdot\frac{32}{45}\right):2\frac{2}{3}$; b) $\left(\frac{11}{25}+\frac{3}{50}\right):\left(\frac{2}{15}+\frac{3}{25}\right)\cdot\left(\frac{7}{5}+\frac{1}{2}\right)\cdot1\frac{1}{9}$.

3. Aflaţi un număr ştiind că:

a) $\frac{2}{5}$ din el reprezintă 36; b) $\frac{7}{5}$ din el reprezintă 280.

4. Aflaţi $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{2x+7}{x+1} \in \mathbb{N}$.

5. Media aritmetică a două numere este 1,25. Calculaţi numerele, ştiind că diferenţa lor este $\frac{1}{3}$.

6. Aflaţi valorile lui $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{1}{3} < \frac{x+1}{4} < \frac{7}{5}$.

PE-PP 15. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

Numerele raţionale fac parte din viaţa noastră de zi cu zi.

Care sunt situaţiile în care oamenii sunt obligaţi să facă tot felul de calcule cu numere raţionale? În primul rând, atunci când fac *cumpărături*. În al doilea rând, atunci când întocmesc (emit) *facturi*. Problemele care urmează reflectă câteva dintre aceste aspecte.

Emiterea unei facturi

1. ***Factura pentru plata energiei electrice***

O societate comercială furnizează populaţiei energia electrică pe care aceasta o foloseşte pentru iluminat şi pentru a pune în funcţiune diverse aparate electrocasnice. Consumul de energie electrică se plăteşte de către fiecare familie, numită *client* al societăţii respective.

Aparatul care înregistrează consumul este *contorul*. Este un instrument care măsoară energia consumată în kilowaţi-oră (kWh). O altă unitate de măsură este megawatul-oră (MWh); 1000 kWh = 1 MWh. După citirea contorului, reprezentanţii societăţii comerciale întocmesc un document numit *factură*. Pe baza facturii, clientul (familia) plăteşte energia consumată.

Plata facturii include diverse taxe dintre care cea mai importantă este TVA-ul (taxa pe valoarea adăugată). Aceasta este fixată de guvern şi este de 24% (24 la sută sau 24 de procente) dintr-o valoare, ceea ce înseamnă $\frac{24}{100}$ din valoarea respectivă. Alte taxe impuse de guvern sunt: Taxa RADIO şi Taxa TV de 2,5, respectiv 4 lei pe lună. La aceste taxe nu se aplică TVA.

Factura emisă se compune din trei părţi, pe care le puteţi vedea în cele ce urmează:

Partea I

a) Calculaţi numărul de zile pentru care se calculează consumul de energie.

b) Calculaţi consumul de energie pentru fiecare dintre cele două perioade menţionate în factură şi consumul total.

c) Calculaţi numărul de kWh consumaţi zilnic.

PERIOADA CITIRE	SERIE/ CONTOR		INDEX VECHI	INDEX NOU	CONSUM
18.12-31.12	543514	1	11381	11514	?
31.12-21.02	543514	1	11514	12044	?
? zile	? kWh/zi		TOTAL ?		

Partea a II-a

d) Efectuaţi calculele necesare, apoi copiaţi şi completaţi partea a doua a facturii cu datele rezultate din calcul. Rezultatul fiecărui calcul se rotunjeşte la a doua zecimală.

Calculăm rândul al doilea din factură, spre a vă servi drept model:

$133 \cdot 0{,}3125 = 41{,}5625 = 41{,}56$ (valoare fără TVA).

Aplicăm TVA $\frac{24}{100}$ la valoarea 41,56. Deci, $\frac{24}{100} \cdot 41{,}56 = 9{,}9744 = 10{,}00$.

Rezultă valoarea (cu TVA) care se trece în factură: $41{,}56 + 10{,}00 = 51{,}56$.

PERIOADA FACTURARE	TIP TARIF	DENUMIRE CONCEPT FACTURAT	UM	CANT	PRET UNITAR	VALOARE (cu TVA)
19.12-31.12	J CR	Rezervare	Zile	13	0,1503	?
19.12-31.12	J CR	Energie activa	kWh	133	0,3125	?
01.01-21.02	J CR	Rezervare	Zile	52	0,1562	?
01.01-21.02		Taxa Radio	Luni	2	2,5000	?
01.01-21.02		Taxa TV	Luni	2	4,0000	?
01.01-21.02	J CR	Energie activa	kWh	530	0,3247	?
-		Accize MWh necomercial	MWh	?		3,37
		TOTAL				?

Partea a III-a

e) Efectuaţi calculele necesare, apoi copiaţi şi completaţi, cu datele rezultate din calcul, şi partea a treia a facturii. Rotunjiţi rezultatul fiecărui calcul la a doua zecimală.

Produse şi servicii facturate	Suma facturată (fără TVA)
Energia electrică activă	? lei
Abonament/Rezervare	? lei
Taxa RADIO	? lei
Taxa TV	? lei
Accize	? lei
Total factură fără TVA	**? lei**
Baza impozitare TVA	? lei

TVA 24%	? lei
Total factură cu TVA	**? lei**
Alte sume	? lei
TOTAL DE PLATĂ	**? lei**

2. ***Factura pentru plata telefonului***

O societate comercială furnizează populației servicii de telefonie, de internet şi de date. Aceste servicii se plătesc. Societatea emite factură prin care aduce la cunoştinţa clientului de ce servicii a beneficiat şi cât are de plată. De asemenea, plata facturii include TVA-ul (taxa pe valoarea adăugată). Aceasta este fixată de guvern şi este de 24% (vezi problema precedentă). Aici se folosesc şi numerele raționale negative, cu sensul de diminuare a valorii de plată. Calculaţi, apoi copiaţi şi completaţi factura.

	LEI
Abonamente	28,56
Abonamente servicii de telefonie	53,04
Abonamente servicii de Internet şi date	
Consum/Alte servicii	11,57
Convorbiri	−12,42
Reduceri	?
Total factură curentă fără TVA	19,38
TVA 24%	?
Total factură curentă	4,13
Rate echipamente	**4,13**
Total rate	56,79
Sold precedent	−57,00
Plăţi efectuate	?
Total de plată până la 29.03.2012	

La cumpărături

3. ***Bonul fiscal***

Pentru produsele cumpărate de un client (cumpărător), angajatul de la casa de marcaj emite un *bon fiscal*.

a) Calculaţi, copiaţi şi completaţi bonul fiscal.

b) Pentru a achita cumpărăturile, clientul îi dă casierului o bancnotă de 50 de lei şi două de 10 lei. Care este restul pe care trebuie să-l primească?

c) Câte grame de musaca de cartofi a cumpărat clientul? Dar de pulpe de pui?

1.0000 ×	14.99	
File somon		?
0.3200 ×	17.90	
Musaca cartofi kg		?
0.1820 ×	19.90	
Pulpe pui kg		?
2.0000 ×	2.09	
Apă min. plată		?
3.0000 ×	7.99	
Cereale		?
3.0000 ×	3.99	
Lapte		?
4.0000 ×	0.49	
Iaurt cu fructe		?
TOTAL DE PLATĂ		?
TVA 24%		?

Alte probleme impuse de viaţa cotidiană

4. ***Tâmplărie***

O scândură, cu lungimea de 236 mm, trebuie tăiată în bucăţi de câte 20 mm fiecare. Lăţimea tăieturii este de 4 mm. Câte bucăţi rezultă?

5. ***Producţie şi profit***

O societate comercială realizează un produs (de exemplu, mobilă). Fabricarea produsului presupune următoarele categorii de cheltuieli: *cheltuielile directe* (valoarea materiilor prime utilizate, salariile muncitorilor etc.), *cheltuielile indirecte* (de exemplu, salariile personalului administrativ etc.). *Profitul* (câştigul) rezultă în urma vânzării produselor şi este diferenţa dintre suma rezultată în urma vânzării produselor şi suma cheltuielilor.

Se cunosc:
- cheltuielile directe (a lei pentru fiecare produs finit);
- cheltuielile indirecte (b lei pe an);
- preţul de vânzare (c lei pe unitatea de produs).

Câte unităţi de produs trebuie realizate pe an, pentru a avea un profit mai mare de p lei?

Aplicaţie numerică: $a = 1173{,}75$; $b = 3900$; $c = 2347{,}5$; $p = 90000$.

6. ***Amenajarea ştrandului***

Oraşul Drobeta Turnu-Severin este un mic port la Dunăre. La ce distanţă, în aval, de portul oraşului trebuie amenajat un ştrand, pentru ca o cursă cu vaporul dus-întors să dureze cel mult t minute? Nu se ţine cont de opriri şi se cunosc:
- viteza vaporului (v_1 km/min);
- viteza curentului (v_2 km/min).

Notă. 1. Viteza vaporului/curentului este distanţa parcursă de vapor/curent în unitatea de timp.

2. Aval = direcţia în care curge un râu; mai aproape de vărsare.

7. ***Aprovizionare mai ieftină***

Localităţile A şi B sunt la o distanţă de d km una faţă de alta. În localitatea A se produce făină la preţul de p_1 lei tona, iar în localitatea B făina se produce la preţul de p_2 lei tona, p_2 fiind mai mare ca p_1 cu p% din p_1.

a) Dacă pentru o tonă de făină cheltuielile de transport sunt de c lei pe km, în ce punct D, între A şi B, va fi mai ieftină tona de făină transportată din B, faţă de tona de făină transportată din A?

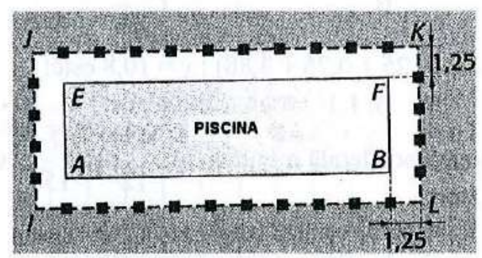
b) Localitatea C, aflată între localităţile A şi B, este la distanţa s de localitatea B. Aprovizionarea cu o tonă de făină a localităţii C va fi mai ieftină dacă se face din localitatea B?

Aplicaţie numerică: $d = 200$; $p_1 = 2500$; $p = 1$; $c = 8$; $s = 110$.

Notă: $p\%$ din $p_1 = \dfrac{p}{100}\, p_1$.

8. ***Piscina***

O piscină, cu lungimea $AB = 14$ m şi lăţimea $AE = 5$ m, trebuie împrejmuită conform schemei alăturate. Distanţa care trebuie lăsată în jurul piscinei este de 1,25 m. Pentru împrejmuire se utilizează panouri dreptunghiulare.



Lungimea L a unui panou, exprimată printr-un număr întreg de centimetri, trebuie să fie cea mai mare posibilă. Calculaţi lungimea L şi numărul de panouri necesare pentru împrejmuirea piscinei.

PE Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Soluția ecuației $x+\frac{1}{2}=1,25$ este numărul rațional …… .

(0,5p) **2.** Media aritmetică a numerelor $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ și $\frac{9}{10}$ este egală cu ……, adică …… .

(0,5p) **3.** Două ecuații se numesc echivalente ....

....

(0,5p) **4.** Dacă $\frac{x}{2}=0,(3)$, atunci x este egal cu …… .

(0,5p) **5.** Media ponderată a numerelor $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{5}$ cu ponderile 3 și 5 este egală cu ……, adică ……

(0,5p) **6.** Triplul numărului x micșorat cu 2,3 dă ca rezultat 1,3. Numărul x este egal cu ……

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Numărul $\frac{1}{7}$ este soluție a ecuației:

A. $x-7=0$ B. $7x+3=4$ C. $7x+1=0$ D. $x+7=0$

(0,5p) **2.** Media aritmetică a numerelor $\frac{1}{6}$ și $\frac{4}{9}$ este egală cu:

A. $\frac{11}{36}$ B. $\frac{11}{18}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{23}{45}$

(0,5p) **3.** Soluția ecuației $(6,25+0,75+4,88):x=10,8$ este:

A. 11 B. 1,1 C. 0,11 D. 0,18

(0,5p) **4.** Media aritmetică ponderată a numerelor $\frac{11}{12}$ și $\frac{7}{15}$, cu ponderile 3 respectiv 5, este egală cu:

A. $\frac{61}{132}$ B. $\frac{61}{72}$ C. $\frac{61}{96}$ D. $\frac{61}{48}$

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Suma a două numere este 28,77. Calculați numerele, știind că diferența lor este 5,69.

(1p) **2.** Suma a trei numere este 104,28. Dacă din fiecare se scade același număr natural, se obțin numerele 19,57; 19,89 și respectiv 19,82. Determinați numerele inițiale.

(1p) **3.** Rezolvați ecuația $\frac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+2013\cdot2014}{2\cdot4+4\cdot6+6\cdot8+...+4026\cdot4028}=\frac{1}{x^2}$.

(1p) **4.** Rezolvați ecuația $\frac{x+1}{2}=\frac{2^{2014}+2^{2014}}{2^{2013}+2^{2013}}$.

Probleme pentru pregătirea concursurilor şcolare

1. Se consideră fracţia $F = \frac{165}{231}$. Câte numere naturale sunt în mulţimea $M = \{F, 2 \cdot F, 3 \cdot F, ..., 2008 \cdot F\}$?

Olimpiada judeţeană, Iaşi, 2008

2. Aflaţi $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că: $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+...+n} = \frac{2013}{2015}$.

3. Aflaţi numărul natural x care este soluţie a ecuaţiei $x^{a+3} = 2014^4$, ştiind că:

$$a = \left[2014 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + ... + \frac{1008}{1009}\right) : \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + ... + \frac{1010}{1009}\right)\right].$$

4. Calculaţi: $\left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{4}\right) \cdot ... \cdot \left(1+\frac{1}{101}\right)$.

5. Se consideră numerele $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2015}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{2014}{2015}$. Calculaţi media aritmetică a celor două numere.

6. Se dau numerele raţionale pozitive a, b, c cu proprietăţile:

$$\frac{3a}{2} = \frac{4b}{3} = \frac{5c}{4} \text{ şi } 15a - 4b + 5c = 4.$$

Arătaţi că are loc inegalitatea $\frac{4}{3} < 3a - 3b + 5c < \frac{7}{5}$.

Petrică Dicu, Sibiu

7. Se consideră numerele:

$$A = \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right) \cdot ... \cdot \left(1+\frac{1}{2013}\right) \text{ şi } B = \left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot ... \cdot \left(1-\frac{1}{2015}\right).$$

a) Calculaţi numerele A şi B.

b) Arătaţi că $A \cdot B < 0{,}5$.

8. Determinaţi cifra a, astfel încât numărul $A = \overline{0{,}1(a)} + \overline{0{,}(a)} + \overline{0{,}a(1)}$ să fie natural.

9. Fie numerele $a = 0{,}0(2)$, $b = 0{,}0(02)$, $c = 0{,}0(002)$, $d = 0{,}0(0002)$. Arătaţi, fără a face adunarea, că numărul $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ este multiplu de 9.

10. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

11. Calculaţi x, ştiind că: $x = \overline{0{,}(1x)} + \overline{0{,}(2x)} + \overline{0{,}(3x)} + ... + \overline{0{,}(9x)}$.

Olimpiada judeţeană, Argeş, 1996

Geometrie

Capitolul I
Dreapta

Competenţe specifice:

- **C1.** Recunoaşterea şi descrierea unor figuri geometrice plane în configuraţii date
- **C2.** Stabilirea coliniarităţii unor puncte
- **C3.** Utilizarea proprietăţilor referitoare la drepte pentru calcularea unor lungimi de segmente
- **C4.** Utilizarea instrumentelor geometrice (riglă, echer, raportor, compas) pentru a desena figuri geometrice plane descrise în contexte matematice
- **C5.** Exprimarea prin reprezentări geometrice a noţiunilor legate de drepte
- **C6.** Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente
- **C7.** Interpretarea informaţiilor conţinute în reprezentări geometrice în corelaţie cu determinarea unor lungimi de segmente

1. Punct. Dreaptă. Plan

Punctul, dreapta şi planul sunt noţiunile cele mai simple ale geometriei, fiind create de mintea omului **(noţiuni abstracte)**.

În geometrie, **punctele se notează cu litere mari de tipar**: A, B, C, ..., **dreptele cu litere mici**: a, b, c, ..., **iar planele cu litere greceşti**: α, β, γ, ...

Uneori aceste litere sunt afectate de câte un indice inferior (exemple: A_1, d_2, α_3, ...[1]) sau de câte un indice superior (exemple: A', d'', α'', ...[2]).

Noţiunile punct, dreaptă, plan vor fi reprezentate după cum urmează (fig. 1):

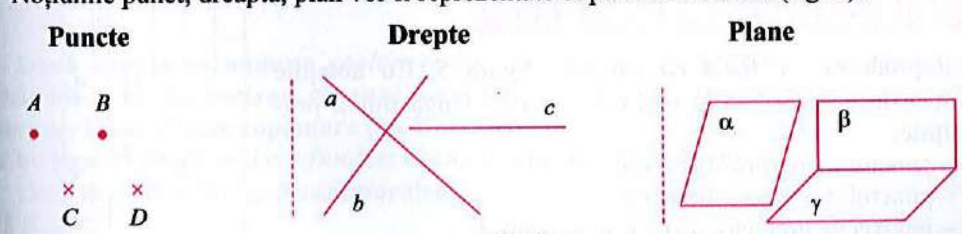


Fig. 1

[1] Citim: *A unu, d doi, alfa trei, ...*
[2] Citim: *A prim, d secund, alfa secund, ...*

Vom privi dreptele și planele ca **mulțimi de puncte** (fig. 2 a) și b)).

Orice **figură geometrică** este văzută ca o **mulțime de puncte**. De exemplu, un triunghi este o mulțime de puncte (fig. 2 c)).

a) b) c)

Fig. 2

Aceasta ne va permite să folosim notațiile și terminologia utilizate în clasa a V-a la mulțimi.

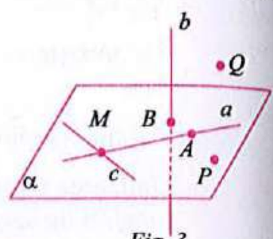


Fig. 3

Să privim cu atenție figura 3. Spunem că:

- punctul A aparține dreptei a și notăm $A \in a$;
- punctul P nu aparține dreptei a și notăm $P \notin a$;
- punctul P aparține planului α și notăm $P \in \alpha$;
- punctul Q nu aparține planului α și notăm $Q \notin \alpha$;
- dreapta a este inclusă în planul α și notăm $a \subset \alpha$;
- dreapta b nu este inclusă în planul α și notăm $b \not\subset \alpha$;
- dreapta b intersectează planul α în punctul B și notăm $b \cap \alpha = \{B\}$;
- dreptele a și c se intersectează în punctul M și notăm $a \cap c = \{M\}$.

REȚINEȚI! Orice figură geometrică este o mulțime de puncte. Cu mulțimi de puncte se pot face următoarele operații: reuniune, intersecție și diferență.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Care sunt cele mai simple noțiuni geometrice?

2. Cum se notează în geometrie punctele, dreptele și planele?

3. Desenați mai multe puncte și drepte (fig. 4). Notați-le corespunzător.

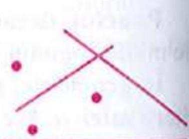


Fig. 4

4. Ce este o figură geometrică?

5. De ce instrumente aveți nevoie pentru a realiza o figură geometrică?

PE Aplicare și exersare **

6. Reproduceți pe foaia cu pătrățele figura 5. Cu notațiile învățate în clasa a V-a la mulțimi, rescrieți lângă figură propozițiile:

– punctul A aparține dreptei a;
– punctul A aparține dreptei b;
– intersecția dreptelor a și b este punctul A;
– dreapta a este inclusă în planul α;
– dreapta b este inclusă în planul α;

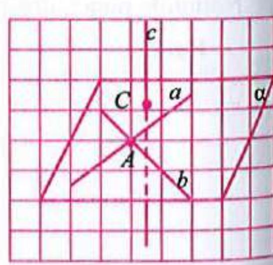


Fig. 5

– dreapta c nu este inclusă în planul α;
– dreapta c intersectează planul α în punctul C.

7. Desenați figura 6. Desenul pune în evidență patru puncte A, B, C, D și patru drepte a, b, c, d. Lângă desen copiați și completați:

Punctul … aparține dreptei (dreptelor) … și nu aparține dreptei (dreptelor) …; notăm ….

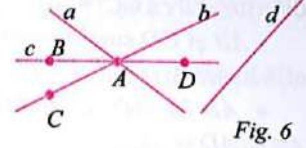
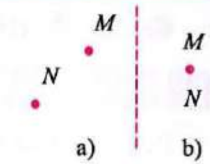


Fig. 6

PE-PP 2. Poziții relative ale punctelor și ale dreptelor

Două puncte M și N pot fi **diferite** și notăm $M \neq N$ (fig. 7 a)) sau **identice** și notăm $M = N$ (fig. 7 b)).

Ori de câte ori considerăm două (sau mai multe) puncte, presupunem că ele sunt diferite (două câte două).



a) b)

Fig. 7

Un punct poate aparține unei drepte sau nu.

În figura 8, punctul A **aparține dreptei** d și notăm $A \in d$, iar **punctul** B **nu aparține dreptei** d și notăm $B \notin d$.

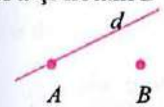


Fig. 8

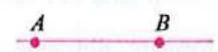


Fig. 9

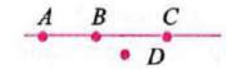


Fig. 10

Oricare ar fi două puncte distincte, există o singură dreaptă care conține cele două puncte sau: prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

Dacă cele două puncte sunt A și B, atunci unica dreaptă care conține cele două puncte se numește **dreapta determinată de punctele** A **și** B și se notează cu AB (fig. 9).

Trei sau mai multe puncte care aparțin aceleiași drepte se numesc puncte coliniare.

Punctele A, B, C din figura 10 **sunt coliniare**, iar punctele A, B, D **nu sunt coliniare**. De asemenea, nu sunt coliniare punctele A, B, C, D.

Două drepte pot fi:
- necoplanare
- coplanare
  - confundate
  - secante sau concurente
  - paralele

Mai multe drepte pot fi concurente sau nu.

Definiții:

Două drepte se numesc *coplanare* dacă există un plan care să le conțină pe amândouă; în caz contrar, ele sunt *necoplanare*. Dreptele necoplanare *nu au puncte comune*. Două drepte coplanare pot fi *secante* dacă au un punct comun, *paralele* dacă nu au puncte comune și *confundate* dacă au toate punctele comune.

Dacă două drepte a și b **sunt paralele**, notăm $a \parallel b$, iar dacă **nu sunt paralele** notăm $a \nparallel b$.

Dacă trei sau mai multe drepte **au un punct comun**, ele se vor numi drepte **concurente**.

Să considerăm un cub (fig. 11).

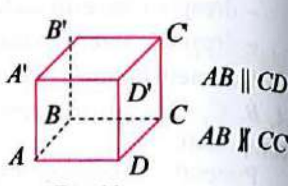


Fig. 11

• AB și CC' sunt **drepte necoplanare** (sunt în plane diferite; $AB \cap CC' = \varnothing$).

• AB și CD sunt **drepte paralele** (sunt coplanare, adică se află în același plan și $AB \cap CD = \varnothing$).

• AB și AD sunt **drepte secante** (sunt coplanare și $AB \cap AD = \{A\}$).

• AB, AD, AA' sunt **drepte concurente** (au punctul A comun: $AB \cap AD \cap AA' = \{A\}$).

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Desenați două puncte M și N, apoi dreapta determinată de aceste două puncte și după aceea notați-o corespunzător.

2. Să notăm cu a dreapta căreia îi aparțin două puncte A și B. Care este propoziția adevărată?

a) Dreptele a și AB sunt egale. b) Dreptele a și AB sunt diferite.

3. a) Desenați figura 12.

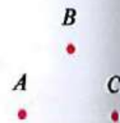


Fig. 12

b) Scrieți toate perechile posibile formate din câte două puncte ale mulțimii $\{A, B, C\}$ și dreptele determinate de fiecare din aceste perechi de puncte.

c) Câte drepte diferite se obțin?

4. Când spunem despre trei sau mai multe puncte că sunt coliniare?

5. Desenați patru puncte A, B, C, D astfel încât dreptele AB și CD să fie egale. Care este propoziția adevărată?

a) Dreptele AC și BD coincid. b) Dreptele AC și BD sunt diferite.

PE Aplicare și exersare **

6. Să considerăm un paralelipiped (fig. 13).

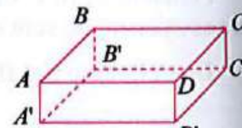


Fig. 13

a) Copiați și completați: $AB \cap BC = \dots$; $AB \cap AA' = \dots$; $AD \cap BB' = \dots$; $AD \cap A'D' = \dots$.

b) Dați câte trei exemple de perechi de drepte determinate de muchiile paralelipipedului, care nu au niciun punct comun și:

i) sunt în același plan; ii) sunt în plane diferite.

c) Scrieți câte două perechi de drepte necoplanare, drepte secante și perechi de drepte paralele.

d) Numiți trei drepte concurente.

7. Să considerăm o piramidă cu baza un pătrat (fig. 14). Fiecare față a piramidei determină un plan și fiecare muchie determină o dreaptă.

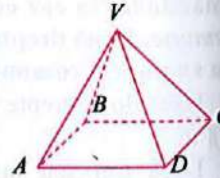


Fig. 14

a) Câte plane și câte drepte sunt reprezentate în desen?

b) Scrieți toate perechile de drepte:

i) paralele; ii) secante; iii) necoplanare.

c) Scrieți dreptele concurente în A și dreptele concurente în C.

8. Desenați două drepte diferite, astfel încât dacă pe una o notăm cu AB, pe cealaltă să o putem nota cu AD.

9. Desenați trei drepte a, b, c, astfel încât $a \cap b = \{C\}$, $a \cap c = \{B\}$ și $b \cap c = \{A\}$. Deduceți egalitățile de drepte $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

10. Desenați două drepte a și b și punctele M, N, P astfel încât $M \in a$, $M \in b$, $N \in a$ și $P \in b$. Deduceți egalitatea $a \cap b = \{M\}$ și egalitățile de drepte $a = MN$, $b = MP$.

11. Construiți un paralelipiped dreptunghic. Fiecare față a paralelipipedului determină un plan și fiecare muchie determină o dreaptă.

a) Câte drepte și câte plane sunt reprezentate în desen?

b) Scrieți toate perechile de drepte: i) necoplanare; ii) secante; iii) paralele.

c) Scrieți trei drepte concurente reprezentate în desen. Mai sunt și altele?

PE Aprofundare și performanță ***

12. Desenați 5 puncte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, astfel încât oricare trei dintre ele să fie necoliniare. Desenați dreptele determinate de aceste puncte și numiți-le.

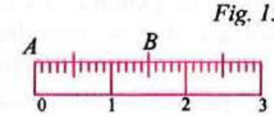
13. Determinați cel mai mic număr de puncte din plan care determină exact trei drepte. Realizați un desen.

14. Fie dreptele d_1, d_2 și d_3 concurente două câte două, dar nu toate concurente. Puteți construi o dreaptă d care să intersecteze doar două din dreptele d_1, d_2 și d_3?

PE-PP 3. Distanța dintre două puncte. Semidreaptă. Semiplan

Definiție: Oricare ar fi două puncte A și B, există un număr notat cu $|AB|$, sau mai simplu cu AB, numit distanța dintre A și B.

Fig. 15



$|AB| = 1{,}5$ cm

Distanța dintre două puncte se poate afla cu ajutorul riglei gradate (fig. 15).

Un punct M se află între două puncte A și B dacă:

a) **A, B și M sunt trei puncte coliniare;**

b) $|AM| + |MB| = |AB|$.

Dacă M este **între** A și B, se mai spune că M **separă** punctele A și B sau că A și B sunt **de o parte și de alta** a lui M; în acest caz, M și B sunt de aceeași parte a lui A, iar A și M sunt de aceeași parte a lui B (fig. 16).

Fig. 16

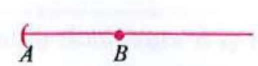
Fiind date două puncte A și B, se numește **semidreaptă deschisă** cu originea A și căreia îi aparține punctul B **mulțimea formată din punctul B și punctele dreptei AB de aceeași parte cu B față de A** (fig. 17). Se notează cu $(AB$.

Fig. 17

Mulțimea $(AB \cup \{A\}$, notată cu $[AB$, se numește **semidreaptă închisă** cu originea A și căreia îi aparține punctul B.

Semidreapta deschisă $(AB$ se reprezintă în desen ca în figura 18, iar semidreapta închisă $[AB$ se reprezintă ca în figura 19.

Fig. 18



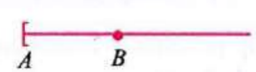


Fig. 19

Vom înțelege mai bine noțiunea de semidreaptă analizând cu atenție figura 20. Dreapta AB este **suportul** semidreptelor.

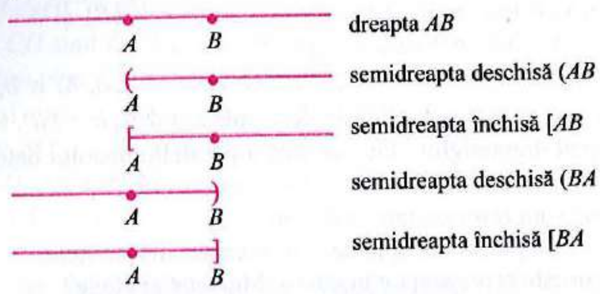


Fig. 20

• Două semidrepte (închise sau deschise) se numesc **semidrepte opuse** dacă au aceeași origine și aceeași dreaptă suport.

• **Orice punct al unei drepte determină pe dreapta respectivă două semidrepte opuse.** De exemplu, punctul O, ce aparține dreptei d (fig. 21), determină pe aceasta semidreptele deschise $(OA$ și $(OB$ care sunt opuse și semidreptele închise $[OA$ și $[OB$ care, de asemenea, sunt opuse.

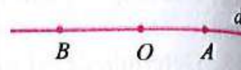


Fig. 21

În cele ce urmează, o semidreaptă (deschisă sau închisă), denumită cu ajutorul a două litere, de exemplu A și B, unde A este originea, va fi reprezentată ca în figura 22. În această situație, notația pe care o folosim va preciza dacă semidreapta este deschisă sau închisă.

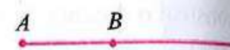


Fig. 22

Fie un plan α, o dreaptă d inclusă în planul α, iar A și B două puncte ale planului α care nu aparțin dreptei d. Dreapta d **separă** punctele A și B dacă dreptele d și AB au un punct comun M și acesta este între A și B (fig. 23). Se mai spune despre A și B că sunt **de o parte și de alta a dreptei** d. Dacă punctele A și B nu ar fi de o parte și de alta a dreptei d, am spune că A și B sunt **de aceeași parte a dreptei** d (fig. 24).

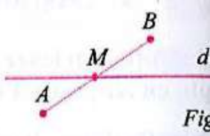


Fig. 23

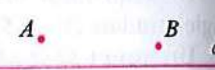


Fig. 24

Fiind date: un plan α, o dreaptă d inclusă în planul α și un punct A al planului α care nu aparține dreptei d, se numește **semiplan deschis** limitat de dreapta d și care conține punctul A **mulțimea formată din punctul A și toate punctele care sunt de aceeași parte a dreptei d cu A** (fig. 25). Se notează cu $(dA$. Mulțimea $(dA \cup d$, notată cu $[dA$, se numește **semiplan închis**. Pentru un semiplan deschis $(dA$ sau închis $[dA$, dreapta d se numește **frontiera semiplanului.**

Fig. 25

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. a) Desenați pe caietul vostru două puncte A și B astfel încât distanța dintre cele două puncte să fie de 2 cm.

b) Utilizând rigla, puneți în evidență dreapta determinată de cele două puncte.

c) Pentru a evita confuziile, vom nota cu AB dreapta determinată de cele două puncte și cu $|AB|$ distanța dintre cele două puncte. Care este egalitatea corectă?

i) $AB = 2$ cm; ii) $AB = |AB|$; iii) $|AB| = 2$ cm.

2. Desenați pe caietul vostru două puncte A și B, astfel încât $|AB| = 2$ cm. Completați cu numere potrivite:

2 cm = ... mm = ... dam = ... dm = ... km = ... hm.

3. Dan, Nicu și Sandu au măsurat distanța dintre două puncte P și Q marcate pe tablă. Dan a găsit $|PQ| = 27$ cm, Nicu a găsit $|PQ| = 27{,}4$ cm, iar Sandu a găsit $|PQ| = 26{,}7$ cm. Cine are dreptate? Comentați.

4. Scrieți denumirea figurii geometrice respective:

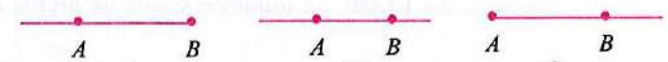


Fig. 26 a) b) c)

Exemplu: a) $(BA$ sau $[BA$.

PE Aplicare și exersare **

5. Completați cu notația potrivită:

a) $(AB \cup \{A\} = ...$; b) $[AB \setminus \{A\} = ...$; c) $(AB \cup \{B\} = ...$

6. Care este propoziția adevărată?

a) $(AB \cup \{A\} \neq [AB$; b) $[AB \setminus \{A\} \neq (AB$; c) $(AB \cup \{B\} = (AB$;

d) $(AB \cap [AB \neq (AB$; e) $(AB \cap [AB = \varnothing$.

7. Fie un dreptunghi $ABCD$.

a) Oricare două vârfuri ale patrulaterului determină o dreaptă; numiți dreptele ce separă câte două vârfuri și vârfurile pe care le separă.

b) Oricare latură determină o dreaptă; numiți vârfurile ce se află de aceeași parte a acesteia.

8. Completați, urmărind fig. 27, cu notația potrivită:

a) $(aP \cup a = ...$; b) $[aP \setminus a = ...$.

Fig. 27

PE Aprofundare și performanță ***

9. Stabiliți poziția punctelor A și B față de dreapta d, știind că punctele A și C, respectiv B și C sunt situate în semiplane diferite, determinate de dreapta d.

10. Fie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 puncte într-un plan, oricare trei dintre ele fiind necoliniare. Care este numărul cel mai mare de puncte care se pot găsi în același semiplan determinat de:

a) o dreaptă ce conține două dintre punctele date?

b) o dreaptă oarecare?

11. Se consideră punctele coliniare A, B, C, D (fig. 28). Completați tabelul alăturat în felul următor: veți scrie ***da*** în rubrica corespunzătoare dacă punctul aparține semidreptei și ***nu*** în caz contrar.

Fig. 28

$\in$	$[AB$	$(BC$	$[BA$	$(DC$
A				
B				
C				
D				

PE-PP 4. Segment. Lungimea unui segment. Segmente congruente. Mijlocul unui segment

Definiție: **Fiind date două puncte A și B, se numește *segment deschis determinat de punctele A și B mulțimea tuturor punctelor dintre A și B* (fig. 29). Se notează cu (AB).**

Fig. 29

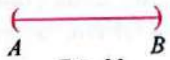


Fig. 30

Fig. 31

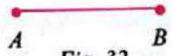


Fig. 32

Mulțimea $(AB) \cup \{A, B\}$, notată cu $[AB]$, se numește **segment închis determinat de punctele A și B.**

Segmentul deschis (AB), unde $A, B \notin (AB)$, este reprezentat în desen ca în figura 30, iar segmentul închis $[AB]$, unde $A, B \in [AB]$, ca în figura 31. În cele ce urmează un segment (deschis sau închis), denumit cu ajutorul a două litere, de exemplu A și B, îl vom reprezenta ca în figura 32. Ca și în cazul semidreptelor, în această situație notația folosită va preciza dacă segmentul este închis sau deschis.

Observație: **Segment semideschis** $[AB)$, unde $A \in [AB)$ și $B \notin [AB)$.
Segment semideschis $(AB]$, unde $A \notin (AB]$ și $B \in (AB]$.

Lungimea unui segment determinat de două puncte A și B este **distanța dintre punctele A și B.**

Două segmente care au aceeași lungime se numesc **segmente congruente.**

De exemplu, deoarece $|AB| = 1{,}2$ cm și $|CD| = 1{,}2$ cm, segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sunt **segmente congruente** (fig. 33). Notăm $[AB] \equiv [CD]$.

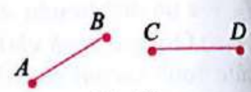


Fig. 33

Construcția unui segment congruent cu un segment dat

PROBLEMĂ. Se dau un segment $[AB]$ și o semidreaptă $[CX$. Construiți punctul $D \in [CX$ astfel încât $[CD] \equiv [AB]$.

Rezolvare (fig. 34): Dăm compasului deschiderea $|AB|$, apoi cu centrul în C se trasează un arc de cerc ce intersectează $[CX$ în D.

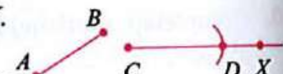


Fig. 34

Un punct M este **mijlocul** unui segment $[AB]$ dacă M este între A și B și $[AM] \equiv [MB]$ (fig. 35).

Fig. 35

Construcția mijlocului unui segment (cu rigla negradată și compasul)

Se dă un segment $[AB]$ (fig. 36). Cu centrul în A și deschiderea $|AB|$ se trasează un arc de cerc; cu centrul în B și aceeași deschidere se trasează un alt arc de cerc. Cele două arce de cerc se intersectează în punctele P și Q. Notăm $PQ \cap AB = \{M\}$. Punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$.

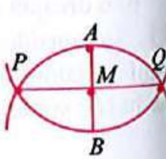


Fig. 36

Verificați utilizând:
a) rigla gradată; b) compasul.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Desenați o dreaptă CD. Hașurați figurile geometrice $[CD$ și $[DC$ și stabiliți rezultatul intersecției $[CD \cap [DC$.

2. Completați cu notația potrivită:
a) $(AB) \cup \{A, B\} = \ldots$; b) $[AB] \setminus \{A, B\} = \ldots$; c) $\{M \mid M$ este între A și $B\} = \ldots$;
d) $\{M \mid M \in (AB)$ sau $M = B$ sau $B \in (AM)\} = \ldots$; e) $(AB) \cup \{A\} = \ldots$;
f) $(AB) \cup \{B\} = \ldots$; g) $[AB] \setminus \{A\} = \ldots$; h) $(AB] \setminus \{B\} = \ldots$;
i) $[AB) \cup \{B\} = \ldots$; j) $[AB] \setminus \{A\} = \ldots$; k) $(AB] \cup \{A\} = \ldots$; l) $[AB] \setminus \{B\} = \ldots$.

3. Desenați două segmente $[MN]$ și $[PQ]$ astfel încât intersecția lor să fie mulțimea vidă, iar dreptele MN și PQ să fie egale.

4. Ce este $|AB|$? Dar AB? Dar $[AB]$? Este corectă egalitatea $|AB| = [AB]$? Dar egalitatea $AB = [AB]$? De ce?

5. Segmentele din figura 37 sunt congruente. Notați-le corespunzător și, utilizând rigla gradată, verificați congruența lor. Scrieți relația din care se deduce congruența celor două segmente.

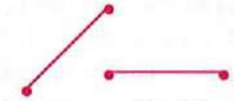


Fig. 37

6. Desenați și notați corespunzător două segmente congruente care să aibă mai multe puncte comune. Scrieți relația din care se deduce congruența celor două segmente.

7. Desenați două segmente $[PQ]$ și $[RS]$ astfel încât să fie îndeplinite condițiile:
i) P, Q, R, S sunt puncte coliniare; ii) $[PQ] \equiv [RS]$; iii) $[PQ] \cap [RS] = \varnothing$.

8. Se dau două segmente $[AB]$ și $[CD]$ și o semidreaptă $[EX$.
a) Construiți cu rigla negradată și compasul punctul $M \in [EX$, astfel încât:
$|EM| = |AB| + |CD|$.
b) În ipoteza suplimentară $|AB| > |CD|$, construiți punctul $N \in [EX$ astfel încât:
$|EN| = |AB| - |CD|$.

9. Fie punctele A, B, C astfel încât $B \in (AC)$, $|AB| = 1$ cm și $|BC| = 1{,}5$ cm (fig. 38). Stabiliți lungimea segmentului $[AC]$:
a) prin calcul; b) utilizând rigla gradată.

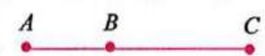


Fig. 38

PE Aplicare și exersare **

10. Fie $B \in (AC)$ și $E \in (DF)$ astfel încât $[AB] \equiv [DE]$ și $[BC] \equiv [EF]$ (fig. 39). Fără a folosi rigla gradată sau compasul, demonstrați că $[AC] \equiv [DF]$.

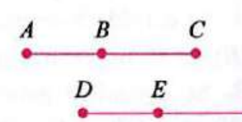


Fig. 39

11. Pe o hartă S.N.C.F.R (fig. 40) sunt marcate distanțele în kilometri.

Fig. 40

Calculați distanțele: București – Medgidia, Ciulnița – Medgidia, Fetești – Constanța, București – Cernavodă.

12. Punctele O, A, B, C, D aparțin dreptei d (fig. 41). Se știe că $|OA| = 1{,}4$ cm, $|OB| = 3$ cm, $|OC| = 4{,}7$ cm, $|OD| = 6{,}8$ cm.

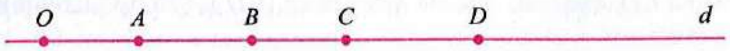


Fig. 41

Calculați lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AC]$, $[BD]$, $[AD]$, observând că lungimea fiecăruia este diferența dintre lungimile a două segmente.

13. Se dau punctele O, A, B, astfel încât $A \in [OB]$, $|OA| = 3$ cm și $|OB| = 7$ cm. Aflați $|OM|$, unde M este mijlocul segmentului $[AB]$.

14. Se dau punctele O, A, B și M. Știind că $O \in [AB]$, M este mijlocul segmentului $[AB]$, $|OA| = 32$ cm și $|OM| = 40$ cm, aflați $|OB|$.

15. Se consideră trei puncte A, B, C aparținând semidreptei $[OM$, astfel încât $|OA| = 2$ cm, $|OB| = 6$ cm, $|OC| = 12$ cm. Fie D, E, F mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$. Arătați că segmentele $[DE]$ și $[BF]$ au același mijloc.

16. Fie punctele A, B, C, D astfel încât $B \in (AC)$, $C \in (BD)$, $|AB| = 1$ cm, $|AC| = 2{,}5$ cm, $|BD| = 4$ cm. Determinați lungimile segmentelor $[BC]$, $[CD]$ și $[AD]$.

17. Sanda măsoară lungimea unui pod folosindu-se de indicațiile de la kilometrajul automobilului tatălui său. La un capăt al podului, aparatul indica 43598,8, iar la celălalt 43601,6. Cât este de lung podul?

PE Aprofundare și performanță ***

18. Se dau punctele coliniare O, A, B astfel ca $|OA| = a$ cm, $|OB| = b$ cm. Calculați $|OM|$, unde M este mijlocul segmentului $[AB]$. Discuție.

19. Despre punctele A, B, P, M, N se știe că:

$P \in [AB]$, $M \in AP$ și $[AM] \equiv [MP]$, $N \in PB$ și $[PN] \equiv [NB]$.

a) Realizați un desen care să ilustreze această situație.

b) Știind că $|MN| = 2{,}75$ m, aflați $|AB|$.

20. Fie A, B, C puncte coliniare astfel încât $|AB| = \dfrac{3}{4} \cdot |AC|$. Dacă $|AB| = 9$ cm, iar M și N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[BC]$, calculați $|MN|$.

21. Se consideră segmentul $[AB]$ cu $|AB| = 32$ cm. Se notează cu M_1 mijlocul segmentului $[AB]$, cu M_2 mijlocul segmentului $[AM_1]$ și cu M_3 mijlocul segmentului $[AM_2]$. Calculați $|AM_3|$.

22. Se consideră punctele coliniare O, A, B și C în această ordine, astfel încât $|OA| = 12$ cm, $|OB| = 18$ cm și $|BC| = 3$ cm. Se notează cu M, N și P mijloacele segmentelor $[OC]$, $[AB]$ și, respectiv, $[BC]$.

a) Calculați $|AB|$; $|OC|$; $|AC|$.

b) Arătați prin calcul că N este mijlocul segmentului $[MP]$.

PE-PP Supermate ****

23. Pe segmentul $[AB]$ de lungime 1 se iau punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ astfel încât $AM_1 = \dfrac{2}{3}AB$, $M_1M_2 = \dfrac{2}{3}M_1B$, $M_2 \in (M_1B)$, ..., $M_{n-1}M_n = \dfrac{2}{3}M_{n-1}B$, $M_n \in [M_{n-1}B]$.

a) Determinați lungimea segmentului $[M_nB]$.

b) Arătați că: $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \ldots + \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{3^n - 1}{3^n}$.

Olimpiada județeană Prahova, 1996

24. Punctele A, B, C, D sunt coliniare și au proprietatea că $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{2}{5} = \dfrac{DA}{DB}$. Știm că $AB = 42$ cm, iar punctul C este interior segmentului AB. Aflați:

a) ordinea punctelor pe dreapta AB;

b) lungimea segmentului CD;

c) poziția mijlocului O al segmentului $[CD]$ pe dreapta dată și valoarea raportului $\dfrac{OA}{OB}$.

Olimpiada județeană Bacău, 1996

25. Pe segmentul (AB) se consideră punctele $M_1, M_2, \ldots, M_{1998}$ astfel încât $AM_1 = \dfrac{AB}{3}$; $AM_2 = \dfrac{AM_1}{3}$; ...; $AM_{1998} = \dfrac{AM_{1997}}{3}$.

a) Exprimați AM_{1998} cu ajutorul lui AB.

b) Dacă $AB = 3^{1998}$, calculați $S = 2(AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_{1998}) + 1$.

Olimpiada județeană Vrancea, 1998

26. Fie $P \in (AQ$, Q mijlocul segmentului $[AB]$ și B mijlocul segmentului $[QP]$. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p: „$QB = \dfrac{AQ + BP}{2}$” și q: „$\dfrac{1}{AQ} + \dfrac{1}{QB} + \dfrac{1}{BP} \geq \dfrac{2}{AP}$”.

Olimpiada județeană Hunedoara, 2002

27. Fiind date 15 puncte distincte, există o așezare a acestora în același plan așa încât, unindu-le două câte două, să se obțină 106 drepte?

Olimpiada județeană Argeș, 1996

PE-PP 5. Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. a) Desenați o dreaptă d și punctele A, B, C, M, E, F astfel încât $A, B \in d$, $C \in (AB)$, $M \notin d$, $E \in (dM$, $F \notin (dM$.

b) Completați $[CA \cap [AB = \ldots$

2. Se consideră punctele A, M, N ce aparțin unei drepte CD, astfel încât $M \in [AC$, $N \in [AD$, $D \notin [AC]$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $M \in [AN]$;

b) $A \in [MN]$;

c) $N \in [AM]$.

3. Desenați două drepte secante a și b; dacă $a \cap b = \{O\}$, desenați $A, B \in a$ și $C, D \in b$, astfel încât $|AB| = 4$ cm, $[CD] \equiv [AB]$, iar O să fie mijlocul segmentelor $[AB]$ și $[CD]$.

4. Desenați punctele A, B, C, D, astfel încât $B \in (AC)$, $C \in (BD)$, $|AB| = 2{,}5$ cm, $|BC| = 1{,}8$ cm; $|CD| = 8{,}7$ cm. Aflați $|AC|$, $|AD|$, $|BD|$.

TESTUL 2

1. Pe segmentul $[AB]$ se ia un punct M astfel încât $|AB| = 2,8$ cm și $|MB| = 1,9$ cm. Calculați $|AM|$.

2. Pe segmentul $[AC]$ se consideră un punct B astfel încât $|AB| = 6$ cm. Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[BC]$ și $|BN| = 2$ cm, calculați $|BC|$, $|AM|$, $|MN|$, $|AC|$.

3. a) Desenați o semidreaptă $[Ox$ și pe semidreaptă luați punctele A, B și C în această ordine, astfel încât $|AB| = 5$ cm și $|AC| = 10$ cm.

b) Arătați că B este mijlocul segmentului $[AC]$.

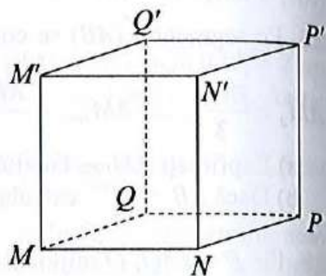
c) Notând cu M și N mijloacele segmentelor $|AB|$ și $|BC|$, calculați $|MN|$.

4. În figura alăturată aveți un cub. Priviți cu atenție cubul $MNPQM'N'P'Q'$. Scrieți câte două drepte determinate de câte două vârfuri ale cubului care sunt:

a) paralele cu MN;

b) concurente cu PQ;

c) necoplanare cu NP.



TESTUL 3

1. Fie A și B două puncte distincte. Prin semidreapta deschisă $(AB$ înțelegem ......

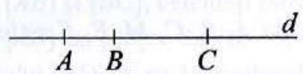
2. Dacă A, B, C sunt puncte distincte două câte două și $AB + BC = AC$, atunci A, B și C sunt ...... și punctul B este ....

3. Se știe că $[AB] \equiv [AC]$. Punctul A este mijlocul segmentului $[BC]$ dacă ....

4. Fie C mijlocul segmentului $[AB]$ cu lungimea de 6 cm și D mijlocul segmentului $[CB]$. Atunci lungimea segmentului $[DC]$ este de ....

5. Conform figurii de mai jos avem:

$(AB \cap (CA =$ ......; $[BA \cap [CA =$ ......; $[BC \cap (AC =$ ....



6. Fie A, B, C puncte coliniare în această ordine astfel încât $AB = 3$ cm și $AC = 7$ cm și fie M și N mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Lungimea segmentului $[MN]$ este de ......

TESTUL 4

1. Se dau segmentele $[MN]$ și $[PQ]$ astfel încât $MN = PQ = 8$ cm și $R \in [MN]$, $S \in [PQ]$, $MR = 3$ cm și $SQ = 5$ cm. Despre segmentele $[QS]$ și $[NR]$ putem spune că ......

2. Dacă d_1 și d_2 sunt două drepte concurente în A și $B \in d_2$, $B \neq A$, atunci $[d_1B \cap d_2 =$ ......

3. Figura alăturată reprezintă o piramidă cu baza pătrat. Fiecare față a piramidei determină un plan și fiecare muchie a piramidei determină o dreaptă. Scrieți:

a) planele reprezentate în figură;

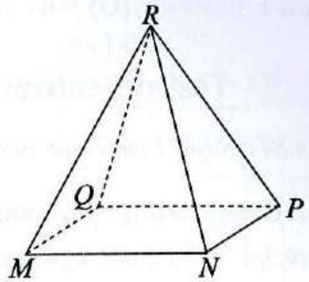
b) dreptele reprezentate în figură;

c) toate perechile de drepte paralele;

d) toate perechile de drepte concurente;

e) toate perechile de drepte necoplanare;

f) trei drepte concurente.



4. Pe segmentul $[MN]$ se consideră punctele P și Q astfel încât Q este mijlocul segmentului $[MP]$, iar P este mijlocul segmentului $[QN]$.

a) Dacă $|PQ| = 2$ cm, atunci calculați $|MN|$.

b) Dacă $|MN| = 9$ cm, atunci calculați $|PQ|$.

PE Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Se numesc puncte coliniare ....

(0,5p) **2.** Două drepte sunt concurente dacă ....

(0,5p) **3.** Dacă $A \in BC$ și B și C sunt situate de o parte și de alta a punctului A, atunci semidreptele $(AB$ și $(AC$ ....

(0,5p) **4.** Dacă $(a, A = (a, B$ sunt semiplane opuse, atunci dreptele AB și a ....

(0,5p) **5.** Dacă $(a, A = (a, B$ și $(a, A$ și $(a, C$ sunt semiplane opuse, atunci semiplanele $(a, B$ și $(a, C$ ....

(0,5p) **6.** Un punct M este mijlocul unui segment (AB) dacă.. .

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Fie A și B două puncte distincte. Efectuând $[AB] \setminus \{A\}$, se obține:

A. $[AB)$ B. $(AB$ C. $(AB]$ D. (AB)

(0,5p) **2.** Desenați un pătrat $ABCD$. Dreptele AC și BD sunt:

A. paralele B. necoplanare C. confundate D. concurente

(0,5p) **3.** Se consideră 10 puncte distincte două câte două. Numărul maxim de drepte determinate de cele 10 puncte este egal cu:

A. 50 B. 45 C. 12 D. 20

(0,5p) **4.** Pe o dreaptă se iau punctele A și B, astfel încât $AB = 2$ cm. Dacă A' este simetricul punctului A față de B, atunci lungimea segmentului $[AA']$ este egală cu:

A. 2 cm B. 1 cm C. 8 cm D. 4 cm

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** a) Desenați și notați corespunzător două segmente congruente care au un punct comun.

b) Desenați și notați corespunzător două segmente congruente care să aibă mai multe puncte comune.

(1p) **2.** a) Desenați două drepte secante a și b, astfel încât $a \cap b = \{O\}$. Desenați $A \in a$ și $A' \in a$ astfel încât $AA' = 4$ cm și O să fie mijlocul segmentului $[AA']$.

b) Desenați $B \in b$ și $B' \in b$ astfel încât O să fie mijlocul lui $[BB']$ și $BO = 1{,}5$ cm și calculați lungimea segmentului BB'.

(1p) **3.** a) Desenați punctele A, B, C și D astfel încât $B \in (AC)$, $C \in (BD)$, $AB = 1{,}5$ cm, $AC = 3{,}5$ cm și $CD = 1{,}7$ cm.

b) Calculați lungimile segmentelor $[BC]$, $[BD]$ și $[AD]$.

(1p) **4.** Fie A, B și C puncte coliniare în această ordine. Se știe că $AC = 3x + 4$ (cm), că $BC = 2x + 1$ (cm) și că $AB = 7$ cm.

a) Realizați un desen care să ilustreze datele problemei.

b) Calculați lungimile segmentelor BC și AC.

Capitolul II
Unghiuri

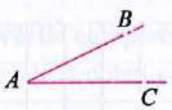
PP Competenţe specifice:

- C₁. Recunoaşterea şi descrierea unor figuri geometrice plane în configuraţii date
- C₂. Utilizarea instrumentelor geometrice (riglă, echer, raportor, compas) pentru a desena figuri geometrice plane
- C₃. Verificarea faptului că două unghiuri sunt adiacente, complementare sau suplementare
- C₄. Utilizarea proprietăţilor referitoare la unghiuri pentru calcularea măsurilor acestora
- C₅. Exprimarea prin reprezentări geometrice a noţiunilor legate de unghiuri
- C₆. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculelor cu măsuri de unghiuri
- C₇. Interpretarea informaţiilor conţinute în reprezentări geometrice în corelaţie cu determinarea unor măsuri de unghiuri

PE-PP 1. Unghi. Unghi nul. Unghi alungit

Definiţie: Un unghi este reuniunea a două semidrepte închise care au aceeaşi origine. Cele două semidrepte se numesc **laturile unghiului,** iar originea comună se numeşte **vârful unghiului.**

Dacă cele două semidrepte sunt $[AB$ şi $[AC$, unghiul va fi notat $\sphericalangle BAC$ sau $\sphericalangle CAB$ (fig. 1). Dacă cele două semidrepte sunt h şi k, unghiul va fi notat $\sphericalangle hk$ sau $\sphericalangle kh$ (fig. 2).

Fig. 1


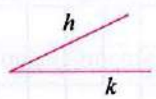


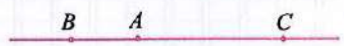
Fig. 2

Pentru unghiul notat $\sphericalangle BAC$ se mai foloseşte notaţia $\sphericalangle A$ dacă nu există pericolul unei confuzii. De asemenea, se utilizează notaţiile $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle hk$, $\sphericalangle A$.

Un unghi ale cărui laturi coincid se numeşte *unghi nul* (fig. 3).

Un unghi ale cărui laturi sunt semidrepte opuse se numeşte *unghi alungit* (fig. 4).

Fig. 3 $\sphericalangle CAB$ este nul deoarece $[AB = [AC$ (semidreptele coincid)



$\sphericalangle BAC$ este alungit deoarece $A \in BC$; $[AB$ şi $[AC$ sunt opuse Fig. 4

Un unghi care nu este nici nul, nici alungit se numeşte **unghi propriu.** Un unghi care este nul sau alungit se numeşte **unghi impropriu.** Ori de câte ori vom considera un unghi, dacă nu este specificat altfel, vom presupune că este unghi propriu.

Dacă $\sphericalangle BAC$ este un unghi (propriu), intersecţia semiplanelor deschise $(AB, C$ şi $(AC, B$, adică a semiplanului limitat de dreapta AB şi care conţine punctul C cu semiplanul limitat de dreapta AC şi care conţine punctul B, se numeşte **interiorul unghiului** $\sphericalangle BAC$ (zona haşurată în figura 5). Interiorul unui unghi $\sphericalangle BAC$ se notează $int(\sphericalangle BAC)$. Un punct care nu aparţine unghiului şi nici interiorului acestuia se numeşte **punct exterior unghiului.**

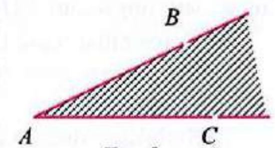


Fig. 5

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Completaţi:

a) Un unghi este ....

b) Dacă $[AB$ şi $[AC$ sunt laturile unui unghi, atunci $[AB \cup [AC = \ldots$ şi $(AB, C \cap (AC, B = \ldots$.

2. Justificaţi de ce figura 6 nu este un unghi. Desenaţi unghiul determinat de figură.

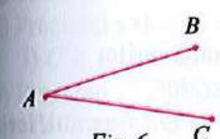


Fig. 6

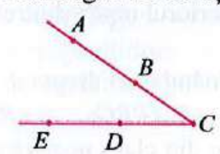


Fig. 7

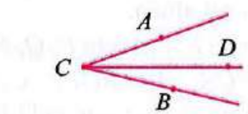


Fig. 8

3. Care din expresiile următoare sunt corecte pentru a denumi unghiul din figura 7?

a) $\sphericalangle ACD$; b) $\sphericalangle DCB$; c) $\sphericalangle ADC$; d) $\sphericalangle ACE$;
e) $\sphericalangle BCD$; f) $\sphericalangle ABC$; g) $\sphericalangle AEC$; h) $\sphericalangle C$.

4. Unghiul $\sphericalangle ACB$ din figura 8 poate fi notat $\sphericalangle C$? Explicaţi!

5. Numiţi unghiurile din figura 9.

6. Analizaţi figura 10 şi precizaţi care dintre puncte sunt interioare unghiului $\sphericalangle ABC$ şi care nu.

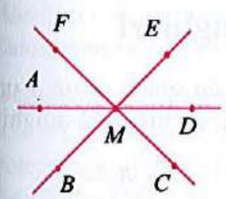


Fig. 9

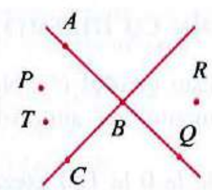


Fig. 10

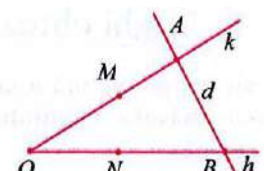


Fig. 11

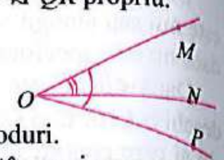
PE Aplicare şi exersare **

7. Amintiţi-vă că figurile geometrice sunt mulţimi de puncte şi analizaţi fig. 11. Notând dreptele ON cu h, OM cu k, completaţi cu simboluri adecvate:

a) $[OA \cup [OB = \ldots$; b) $(hM \cap (kN = \ldots$;
c) $int(\sphericalangle AOB) \cap d = \ldots$; d) $\sphericalangle AOB \cap d = \ldots$.

8. Desenați un unghi alungit $\sphericalangle AOB$, un unghi nul $\sphericalangle A'O'B'$ și un unghi $\sphericalangle PQR$ propriu.

9. În figura alăturată, hașurați oblic spre dreapta mulțimea punctelor interioare unghiului $\sphericalangle NOP$ și oblic spre stânga mulțimea punctelor interioare unghiului $\sphericalangle MOP$.



a) Determinați care este mulțimea punctelor hașurate în ambele moduri.

b) Specificați care este mulțimea punctelor hașurate oblic spre stânga și care nu sunt hașurate spre dreapta.

c) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

i) $\text{int}(\sphericalangle MON) \cup \text{int}(\sphericalangle NOP) = \text{int}(\sphericalangle MOP)$;

ii) $\text{int}(\sphericalangle MOP) \setminus \text{int}(\sphericalangle MON) = \text{int}(\sphericalangle NOP)$.

10. Desenați trei unghiuri astfel încât oricare două să nu aibă puncte interioare comune și să aibă același vârf.

PE Aprofundare și performanță ***

11. Construiți semidreptele $[Ox$, $[Oy$ și $[Oz$ astfel încât să nu existe printre ele două opuse.

a) Scrieți toate unghiurile ce se pot forma având ca laturi aceste semidrepte.

b) Construiți figura astfel încât interioarele oricăror două dintre unghiurile ce au ca laturi semidreptele date să nu aibă puncte comune.

c) Construiți figura astfel încât interiorul unuia dintre unghiuri să fie inclus în întregime în interiorul altuia.

12. Se dau trei puncte P, Q, R, aparținând unei drepte d. Care din unghiurile:

a) $\sphericalangle PQR$; b) $\sphericalangle RQP$; c) $\sphericalangle QRP$; d) $\sphericalangle PRQ$; e) $\sphericalangle RPQ$; f) $\sphericalangle QPR$

este alungit și care este nul? Un coleg din clasa noastră susține că $\sphericalangle PQR$ este nul, iar altul că este alungit. Cine are dreptate?

13. Desenați semidreptele:

a) $[OA$ și $[OB$ astfel încât A, O și B să fie necoliniare;

b) $[OA$ și $[OB$ astfel încât A să fie între O și B;

c) $[OA$ și $[OB$ astfel încât O să fie între A și B.

Stabiliți de fiecare dată ce fel de unghi este $\sphericalangle AOB$.

PE-PP 2. Măsurarea unghiurilor. Unghi drept. Unghi ascuțit. Unghi obtuz. Calcule cu măsuri de unghiuri

Unitatea de măsură a unghiului este **gradul** (°). Numărul de grade al unui unghi se numește **măsura unghiului.** Instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară unghiul este **raportorul.**

Raportorul are numerele întregi de la 0 la 180 așezate uniform ca în figura 12. Unghiul $\sphericalangle AOB$ din figura 12 are 45° (citim „45 grade"). Vom scrie $m(\sphericalangle AOB) = 45°$. Citim: „măsura unghiului AOB este de 45 grade".

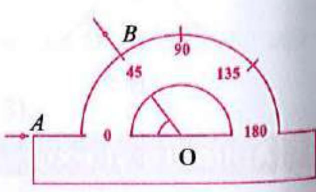


Fig. 12

Măsura unui unghi nul este de 0°, iar măsura unui unghi alungit este de 180°.

Submultiplii gradului sunt: **minutul** (') și **secunda** ("), $1° = 60'$ și $1' = 60''$. Rezultă că minutul este definit ca fiind a 60-a parte dintr-un grad: $\frac{1}{60} \cdot 1° = 1'$, iar secunda ca fiind a 60-a parte dintr-un minut: $\frac{1}{60} \cdot 1' = 1''$.

Definiții: Un unghi cu măsura de 90° se numește **unghi drept.** Un unghi care are măsura mai mică de 90° se numește **unghi ascuțit**, iar un unghi cu măsura mai mare de 90° se numește **unghi obtuz** (fig. 13).

Folosind raportorul, se poate construi ușor un unghi drept. Însă instrumentul cu ajutorul căruia putem trasa dintr-odată un unghi drept este echerul.

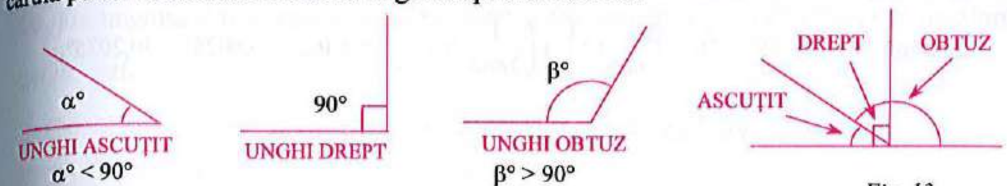
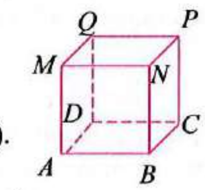


Fig. 13

activități de învățare

PE Înțelegere *

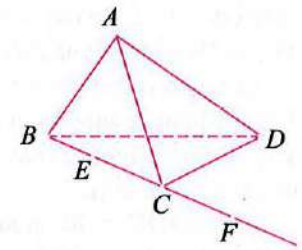


1. În desenul alăturat fie cubul $ABCDMNPQ$.

a) Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

i) $C \in \text{int}(\sphericalangle BAD)$; ii) $P \in \text{int}(\sphericalangle CAM)$; iii) $P \in \text{int}(\sphericalangle NAQ)$.

b) Precizați unghiurile drepte și unghiurile ascuțite care au laturile determinate de vârfuri ale cubului.



2. În desenul alăturat avem piramida $ABCD$ cu toate fețele triunghiuri echilaterale.

a) Precizați unghiurile ascuțite.

b) Ce fel de unghiuri sunt $\sphericalangle ABE$ și $\sphericalangle ACE$, unde $E \in (BC)$?

c) Arătați că $\sphericalangle ACF$ este unghi obtuz pentru oricare F aparținând semidreptei opuse semidreptei $(CB$.

3. Fie segmentul $[AB]$ cu lungimea de 5 cm. Construiți unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle CAB$ astfel încât $m(\sphericalangle ABC) = 80°$ și $m(\sphericalangle BAC) = 40°$.

a) Măsurați cu ajutorul raportorului unghiul $\sphericalangle ACB$.

b) Calculați $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB)$.

4. Fie segmentul $[AB]$ cu lungimea de 5 cm. Construiți în același semiplan față de dreapta AB punctele C și D, astfel încât $m(\sphericalangle BAD) = 110°$ și $m(\sphericalangle ABC) = 130°$.

a) Determinați: $[AD \cap [BC$ și $[DA \cap [CB$.

b) Fie $[DA \cap [CB = \{E\}$. Măsurați cu raportorul unghiurile: $\sphericalangle EAB$, $\sphericalangle ABE$, $\sphericalangle AEB$.

c) Calculați $m(\sphericalangle EAB) + m(\sphericalangle ABE) + m(\sphericalangle AEB)$.

Rețineți rezultatul.

5. Utilizând figura 14, precizați:

$m(\sphericalangle APB)$; $m(\sphericalangle APC)$;
$m(\sphericalangle APD)$; $m(\sphericalangle APH)$;
$m(\sphericalangle APF)$; $m(\sphericalangle APE)$; $m(\sphericalangle APG)$.

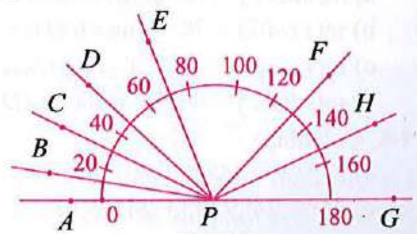


Fig. 14

6. Transformați în expresii de tipul „grade, minute, secunde”:

a) $30{,}12°$; b) $75{,}18°$; c) $15{,}21°$; d) $18{,}25°$.

Exemplu: a) $30{,}12° = 30° + 0{,}12° = 30° + (60 \cdot 0{,}12)' = 30° + 7{,}2' = 30° + 7' + 0{,}2' = 30° + 7' + (60 \cdot 0{,}2)'' = 30° + 7' + 12'' = 30°7'12''$.

7. Expresia de tipul $30°12'9''$ înseamnă $30° + 12' + 9''$.

a) Transformați-o în grade, în minute și apoi în secunde.

b) Același exercițiu pentru expresiile: $37°36'18''$; $42°5'54''$.

Exemplu: a) $30°12'9'' = 30° + \left(\frac{1}{60} \cdot 12\right)^{\circ} + \left(\frac{1}{3600} \cdot 9\right)^{\circ} = 30° + 0{,}2° + 0{,}0025° = 30{,}2025°$.

$30°12'9' = (60 \cdot 30)' + 12' + \left(\frac{1}{60} \cdot 9\right)' = 1800' + 12' + 0{,}15' = 1812{,}15'$.

PE Aplicare și exersare **

8. O altă unitate de măsură a unghiurilor este ***radianul***.

Un raportor, pentru a măsura în radiani, ar avea scala de la 0 la π. Astfel, la 90° ar corespunde $\pi/2$ radiani. Cât ar corespunde la 30°? Dar la 45°? Dar la 60°? Dar la 120°? Dar la 135°?

Observație: π = literă grecească, se citește „pi”. Aici π reprezintă un număr. În practică, pentru numărul π se ia valoarea aproximativă 3,14.

9. De două ori măsura unui unghi este cu 30° mai mică decât de trei ori măsura unui unghi de 35°. Care este măsura unghiului?

10. a) Desenați un unghi cu măsura de 15°.

b) Se dă o semidreaptă $[AB$ și numărul 15. Desenați un unghi care să aibă măsura de 15° și o latură a unghiului să fie semidreapta dată. Câte posibilități aveți?

11. Fie semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$ astfel încât $[OA \subset \text{int}(\sphericalangle COB)$. Calculați $m(\sphericalangle COB)$ în următoarele cazuri:

a) $m(\sphericalangle AOC) = 90°$ și $m(\sphericalangle AOB) = 37°$;

b) $m(\sphericalangle AOC) = 36°24'$ și $m(\sphericalangle AOB) = 17°35'$;

c) $m(\sphericalangle AOC) = 54°37'12''$ și $m(\sphericalangle AOB) = 24°17''$.

12. Fie dreapta AA' și $O \in (AA')$. În același semiplan determinat de dreapta $A'A$ considerăm semidreptele $[OB$ și $[OC$ astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 70°$ și $m(\sphericalangle AOC) = 40°$. Calculați $m(\sphericalangle A'OB)$, $m(\sphericalangle A'OC)$ și $m(\sphericalangle COB)$.

13. Fie semidreapta $[AB$ și în semiplane diferite determinate de dreapta AB se construiesc unghiurile $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle BAD$. Calculați $m(\sphericalangle DAC)$ dacă:

a) $m(\sphericalangle BAC) = 70°$ și $m(\sphericalangle BAD) = 60°$;

b) $m(\sphericalangle BAC) = 78°$ și $m(\sphericalangle BAD) = 94°37'$;

c) $m(\sphericalangle BAC) = 110°24'$ și $m(\sphericalangle BAD) = 25°17'$;

d) $m(\sphericalangle BAC) = 60°36'$ și $m(\sphericalangle BAD) = 72°24'$.

14. Calculați:

a) $27°32' + 15°47' - 30°24'$; b) $145°17'24'' + 17°24'15'' + 4°3'57''$;

c) $45° - 24°5'17'' + 24°55'12''$; d) $180° - 72°41'14'' + 19°17'53''$.

PE Aprofundare și performanță ***

15. Fie dreapta AB, $O \in (AB)$, iar $[OC$ și $[OD$ în același semiplan determinat de dreapta AB. Calculați:

a) $m(\sphericalangle AOD)$, $m(\sphericalangle COB)$ și $m(\sphericalangle COD)$ dacă: $m(\sphericalangle AOD) = \frac{1}{3} \cdot m(\sphericalangle DOC) = \frac{1}{4} \cdot m(\sphericalangle COB)$;

b) $m(\sphericalangle COD)$, știind că reprezintă media aritmetică dintre $m(\sphericalangle COB)$ și $m(\sphericalangle AOD)$.

16. Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ cu $m(\sphericalangle AOB) = 120°$ și fie semidreptele $[OC$ și $[OD$ în interiorul $\sphericalangle AOB$, astfel încât $m(\sphericalangle AOC) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BOD)$ și $m(\sphericalangle COD) = 48°$.

Calculați $m(\sphericalangle AOC)$ și $m(\sphericalangle BOD)$.

PE-PP Supermate ****

17. a) În interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ cu măsura de 90°, se consideră semidreapta $(OC$ astfel încât $m(\sphericalangle AOC) = 55°30'$. Dacă P este un punct din interiorul unghiului $\sphericalangle BOC$, câte poziții poate ocupa semidreapta $(OP$ astfel încât $m(\sphericalangle AOP) = n°$, $n \in \mathbb{N}$?

b) În interiorul unghiului $\sphericalangle C_1OA$ se consideră semidreptele $(OC_2, \ldots, (OC_n$ astfel încât $m(\sphericalangle C_1OC_2) = 1°$, $m(\sphericalangle C_2OC_3) = 2°$, $m(\sphericalangle C_3OC_4) = 3°$, …, $m(\sphericalangle C_nOA) = n°$. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $m(\sphericalangle C_1OA) = 120°$.

Olimpiada județeană Bihor, 2001

PE-PP 3. Unghiuri congruente. Bisectoarea unui unghi

Definiție: Două unghiuri care au aceeași măsură se numesc **unghiuri congruente.**

Unghiurile $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DEF$ (fig. 15) au aceeași măsură (fiecare are 75°), deci sunt unghiuri congruente.

Notăm: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ sau $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle DEF)$.

Orice două unghiuri nule sunt congruente.
Orice două unghiuri alungite sunt congruente.

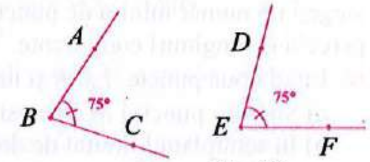


Fig. 15

CONSTRUCȚIA UNUI UNGHI CONGRUENT CU UN UNGHI DAT

Se dă un unghi $\sphericalangle ABC$ și o semidreaptă $[ED$. Construiți un unghi $\sphericalangle DEF$ congruent cu unghiul $\sphericalangle ABC$. Construcția se poate face:

a) ***cu raportorul*** (fig. 16)

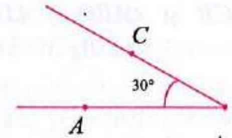


Fig. 16

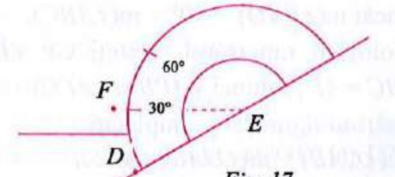


Fig. 17

Direct pe figură constatăm că $m(\sphericalangle ABC) = 30°$. Așezăm raportorul ca în figura 17 și în dreptul diviziunii 30° însemnăm punctul F. (Punctul E este în dreptul diviziunii 0°.)

Desenăm semidreapta $[EF$ şi astfel obţinem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ pentru că $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle DCF) = 30°$.

b) ***cu rigla şi compasul*** (fig. 18)

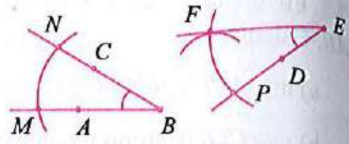


Fig. 18

Un cerc cu centrul în B şi raza r intersectează $[BA$ în M şi $[BC$ în N. Cu centrul în E şi aceeaşi rază se trasează un arc de cerc ce intersectează DE în P. Cu deschiderea MN se trasează un arc de cerc cu centrul în P care intersectează arcul precedent în F. Se uneşte F cu E, $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle ABC$. Verificaţi cu ajutorul raportorului.

Definiţie: **Bisectoarea** unui unghi este semidreapta interioară unghiului, cu originea în vârful unghiului, ce determină cu laturile unghiului două unghiuri congruente (fig. 19).

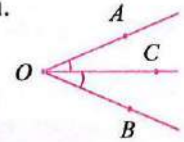


Fig. 19

Dacă $\begin{cases} (OC \subset \text{int}(\sphericalangle AOB), \\ \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COB \end{cases}$
atunci **$(OC$ bisectoarea $\sphericalangle AOB$**

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

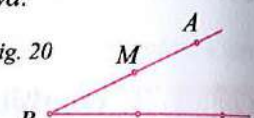
1. a) Când se spune că două unghiuri sunt congruente?

b) Congruenţa între unghiuri este *reflexivă*, *simetrică* şi *tranzitivă*. Scrieţi aceste proprietăţi.

2. Priviţi figura 20. Sunt corecte relaţiile:

a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABP = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MBP$;

b) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle MBP$? Explicaţi.

Fig. 20


3. Intersectând două drepte, obţineţi patru unghiuri. Pentru a denumi aceste unghiuri, alegeţi un număr minim de puncte aparţinând acestor drepte şi, folosind raportorul, indicaţi perechi de unghiuri congruente.

4. Luaţi două puncte A şi B şi un punct C care să nu aparţină dreptei AB.

a) Stabiliţi punctul M care este mijlocul segmentului $[AB]$.

b) În semiplanul limitat de dreapta AB şi care conţine punctul C, construiţi $\sphericalangle AMC$ astfel încât $m(\sphericalangle AMC) = 90°$. Folosind raportorul, arătaţi că:

i) $m(\sphericalangle BMC) = 90°$; ii) $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CBA$.

5. Construiţi un unghi $\sphericalangle BAC$ astfel încât $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AB = 4$ cm şi $AC = 2,8$ cm.

a) Folosind raportorul, stabiliţi $m(\sphericalangle ABC)$.

b) În semiplanul limitat de dreapta AB şi căreia îi aparţine punctul C, construiţi $\sphericalangle BAD$ astfel încât $m(\sphericalangle BAD) = 90° - m(\sphericalangle ABC)$.

c) Folosind raportorul, arătaţi că: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DAC$ şi că dacă $AD \cap BC = \{P\}$, atunci $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle APC$.

6. Urmărind figura 21, completaţi:

a) $m(\sphericalangle CAB) + m(\sphericalangle DAC) = m\ \ldots$

b) $m(\sphericalangle EAD) + m(\sphericalangle DAC) = m\ \ldots$

c) $m(\sphericalangle EAD) + m(\sphericalangle DAB) = m\ \ldots$

d) $m(\sphericalangle EAC) - m(\sphericalangle DAC) = m\ \ldots$

e) $m(\sphericalangle EAB) - m(\sphericalangle EAC) = m\ \ldots$

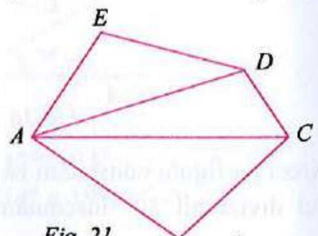


Fig. 21

7. Urmărind figura 21, completaţi:

a) $m(\sphericalangle EDA) + m(\sphericalangle CDA) = m\ \ldots$ b) $m(\sphericalangle EDA) = m\ \ldots - m(\sphericalangle CDA)$

c) $m(\sphericalangle ACD) = m\ \ldots - m\ \ldots$ d) $m(\sphericalangle EAD) + m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle CAB) = m\ \ldots$

PE Aplicare şi exersare **

8. a) Construiţi un unghi $\sphericalangle MNP$ cu măsura de 106° şi un unghi $\sphericalangle QRS$ cu măsura de 17°.

b) Construiţi apoi un unghi $\sphericalangle ABC$ şi un punct D astfel încât $D \in \text{int}(\sphericalangle ABC)$, $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle MNP$, $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle QRS$.

c) Fără a vă folosi de raportor, calculaţi $m(\sphericalangle ABC)$.

d) Este posibilă o problemă de acelaşi fel, cu deosebirea că $m(\sphericalangle QRS) = 90°$?

9. Fie un unghi $\sphericalangle ABC$ şi un punct $P \in \text{int}(\sphericalangle ABC)$. Fără a vă folosi de raportor, dovediţi că $m(\sphericalangle ABC) > m(\sphericalangle ABP)$ şi că $m(\sphericalangle ABC) > m(\sphericalangle PBC)$.

10. Fără a vă folosi de raportor, dovediţi că dacă $D \in \text{int}(\sphericalangle ABC)$ şi $S \in \text{int}(\sphericalangle PQR)$ şi dacă:

a) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle PQS$ şi $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle SQR$, atunci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle PQR$;

b) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle PQS$ şi $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle PQR$, atunci $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle SQR$.

11. Folosind numai judecata, arătaţi că bisectoarea oricărui unghi (propriu) determină cu laturile unghiului două unghiuri ascuţite.

12. Completaţi definiţia următoare: „Bisectoarea unui unghi este …".

13. Desenaţi cu echerul un unghi drept $\sphericalangle AOB$. Pe semidreapta opusă semidreptei $[OB$ luaţi un punct C astfel încât $[OC] \equiv [OB]$. Măsuraţi următoarele unghiuri: $\sphericalangle OAB$, $\sphericalangle OAC$ şi $\sphericalangle BAC$. Ce puteţi spune despre semidreapta $[AO$?

PE Aprofundare şi performanţă ***

14. Se consideră un unghi $\sphericalangle MON$ cu $m(\sphericalangle MON) = 150°$. În interiorul unghiului se consideră semidreptele $[OA$ şi $[OB$, astfel încât $m(\sphericalangle MOA) = m(\sphericalangle NOB) = 90°$.

a) Calculaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle AON$.

b) Dacă $[OX$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, arătaţi că $[OX$ este şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle MON$.

15. În interiorul unghiului $\sphericalangle MON$ se construiesc semidreptele $[OA$ şi $[OB$. Arătaţi că:

a) dacă $\sphericalangle MOA \equiv \sphericalangle NOB$, atunci $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle MON$ au aceeaşi bisectoare;

b) dacă $\sphericalangle MON$ şi $\sphericalangle AOB$ au aceeaşi bisectoare, atunci $\sphericalangle MOA \equiv \sphericalangle NOB$.

PE-PP Supermate ****

16. Fie punctul $B \in \text{int}(\sphericalangle AOC)$. Dacă $[OD$, $[OE$, $[OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOC$, respectiv $\sphericalangle BOC$, arătaţi că:

a) $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle EOD)$; b) $2m(\sphericalangle POE) = m(\sphericalangle AOB)$;

c) unghiurile $\sphericalangle POE$ şi $\sphericalangle COD$ au aceeaşi bisectoare.

17. Se dă unghiul AOB cu $m(\sphericalangle AOB) = 75°$ şi semidreapta $[OC$ în interiorul lui astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = 30°$. Fie $[OD$ astfel încât $[OA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$, iar $[OE$ este opusă lui $[OC$ şi $[OF$ este opusă lui $[OB$. Calculaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle AOF$ şi $\sphericalangle EOF$.

Olimpiada judeţeană Maramureş, 2002

18. Fie semidreptele $(BA$, $(BD$ și $(BC$ astfel încât $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle DBC$ să fie adiacente și $m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle ABD) = 90°$.

a) Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ABD$.

b) Dacă $m(\sphericalangle ABD)$ este 20% din $m(\sphericalangle ABC)$, aflați $m(\sphericalangle ABD)$ și $m(\sphericalangle ABC)$.

Olimpiada județeană Bacău, 2000

19. Se dau semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$ astfel încât $[OB$ și $[OC$ sunt interioare unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și respectiv BOD și $[OM$, $[ON$, $[OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și respectiv $\sphericalangle COD$. (Punctele B, C, D sunt de aceeași parte a dreptei OA.)

a) Dovediți că $m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle AOD) + m(\sphericalangle BOC)$.

b) Dacă $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$, arătați că $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

c) Dacă $m(\sphericalangle MOP) = 92°$, calculați $m(\sphericalangle AOB) + 2 \cdot m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD)$.

Olimpiada județeană Buzău, 2001

PE-PP 4. Unghiuri adiacente. Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare

Definiție: Două unghiuri cu același vârf se numesc **unghiuri adiacente** dacă au o latură comună și interioarele disjuncte.

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COB$ sunt **unghiuri adiacente** (fig. 22) pentru că au o latură comună: $\sphericalangle AOB \cap \sphericalangle COB = [OB$ și interioarele disjuncte $(\sphericalangle AOB) \cap (\sphericalangle COB) = \varnothing$.

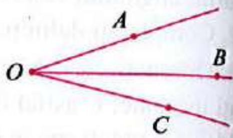


Fig. 22

Cele patru perechi de unghiuri din figura 23 **nu sunt perechi de unghiuri adiacente**.

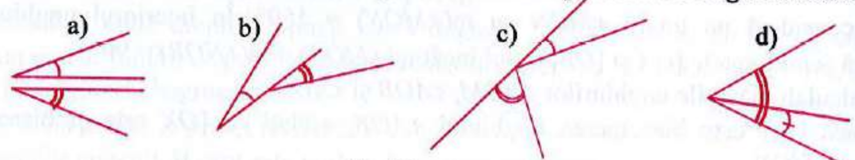


Fig. 23

În cazurile a), b), c) nu au nicio latură comună (de remarcat că la b) este o incluziune, nu o egalitate, iar la c) laturile sunt opuse, nu egale). În cazul d) interioarele nu sunt disjuncte.

Definiție: Dacă suma măsurilor a două unghiuri este de 90°, atunci cele două unghiuri se numesc **unghiuri complementare**, fiecare fiind un complement al celuilalt.

Exemple: a) Complementul unghiului cu măsura de 40° este unghiul cu măsura de $90° - 40° = 50°$.

b) Complementul unghiului cu măsura de 37°20' este unghiul cu măsura de $90° - 37°20' = 52°40'$.

Dacă suma măsurilor a două unghiuri este de 180°, atunci cele două unghiuri se numesc **unghiuri suplementare**, fiecare fiind un suplement al celuilalt.

Exemple: a) Suplementul unghiului cu măsura de 40° este unghiul cu măsura de $180° - 40° = 140°$.

b) Suplementul unghiului cu măsura de 37°20' este unghiul cu măsura de $180° - 37°20' = 142°40'$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. a) Când spunem că două unghiuri sunt adiacente?

b) Desenați două unghiuri adiacente.

c) Explicați de ce perechile de unghiuri din figura 24 nu sunt adiacente.

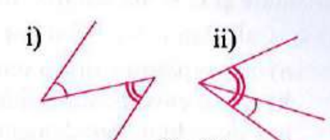


Fig. 24

2. Construiți două unghiuri neadiacente cu măsurile de 20° și 80° care să aibă:

a) o latură comună;

b) o semidreaptă comună și interioarele disjuncte;

c) un segment comun și interioarele disjuncte.

3. a) Desenați două unghiuri adiacente complementare.

b) Desenați două unghiuri adiacente suplementare.

4. Fie un semiplan limitat de dreapta AO. Construiți în acest semiplan semidreptele $(OB$, $(OC$ și $(OD$ astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 65°$, $m(\sphericalangle AOC) = 105°$ și $(\sphericalangle AOD) = 130°$.

a) Știind că punctul E este situat astfel încât $O \in (AE)$, care este măsura unghiului $\sphericalangle DOE$?

b) Găsiți perechile de unghiuri complementare.

5. Construiți cu echerul un unghi drept $\sphericalangle AOB$, astfel ca $OA = 4$ cm și $OB = 2,8$ cm. Folosind raportorul, arătați că unghiurile $\sphericalangle OAB$ și $\sphericalangle OBA$ sunt complementare.

6. Unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle M$ sunt complementare. Tot complementare sunt unghiurile $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle N$. Știind că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, folosind judecata, arătați că $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle N$. Completați propoziția: „Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci complementele lor sunt ...”

7. Se consideră un unghi $\sphericalangle AOB$ cu măsura de 90°, punctul O aparținând unei drepte d față de care A și B sunt de aceeași parte. Fie $M, N \in d$ astfel încât $O \in (MN)$, iar A și M sunt de aceeași parte a dreptei OB.

a) Faceți un desen care să ilustreze această situație.

b) Folosind judecata, arătați că unghiurile $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle BON$ sunt complementare.

8. Unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle P$ sunt suplementare. La fel sunt și unghiurile $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle Q$. Știind că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, folosind judecata, dovediți că $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle Q$. Completați propoziția: „Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci suplementele lor sunt ....”

9. Se consideră mulțimea de cuvinte: {are; este; nu are; nu este}. Alegeți câte un element din această mulțime și completați astfel încât fiecare din următoarele propoziții să fie adevărate:

a) Un unghi obtuz ... complement.

b) Dacă un unghi nu are complement, atunci unghiul ... obtuz.

10. Determinați măsura complementului unui unghi cu măsura:

a) 30°; b) 45°; c) 60°; d) 15°18'; e) 58°3'49"; f) 86°59'3".

PE Aplicare și exersare **

11. De trei ori măsura complementului unui unghi este măsura unghiului. Care este măsura unghiului? Dar a complementului?

12. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este 5/13. Determinaţi măsurile celor două unghiuri.

13. Completaţi următoarea propoziţie: „Dacă unghiurile $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle COB$ sunt complementare şi $C \in \text{int}(\sphericalangle AOB)$, atunci $m(\sphericalangle AOB) = \dots$".

14. Calculaţi măsura unui unghi ştiind că:

a) este o pătrime din complementul său;

b) este o cincime din suplementul său;

c) este dublul complementului său.

15. Determinaţi măsura suplementului unui unghi cu măsura de:

a) 45°; b) 137°; c) 110°20'; d) 65°3'29"; e) 134°59'3".

16. Completaţi propoziţiile:

a) „Dacă două unghiuri sunt complementare şi congruente, atunci fiecare dintre ele are măsura egală cu …".

b) „Dacă două unghiuri sunt suplementare şi congruente, atunci fiecare este un unghi …".

17. Măsura unui unghi este de trei ori mai mare decât măsura suplementului său. Care este măsura unghiului? Dar a suplementului?

18. Măsura unui unghi este cu 24° mai mare decât măsura suplementului său. Calculaţi măsura unghiului.

19. Raportul măsurilor a două unghiuri suplementare este 1/3. Aflaţi măsurile celor două unghiuri.

20. Un unghi are măsura de 130°. Construiţi un unghi adiacent şi suplementar cu acesta şi precizaţi măsura lui.

21. Fie mulţimea de cuvinte: {complementare, suplementare, congruente, adiacente}. Din această mulţime alegeţi cuvântul potrivit pentru a completa enunţurile următoare:

a) Dacă $\sphericalangle COD$ este un unghi drept (fig. 25), atunci despre unghiurile $\sphericalangle COA$ şi $\sphericalangle DOB$ se poate afirma că sunt ….

b) Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$, atunci unghiurile $\sphericalangle COM$ şi $\sphericalangle DOM$ sunt …, … şi ….

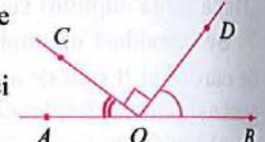


Fig. 25

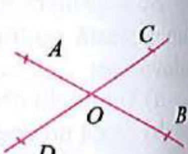
22. Completaţi propoziţiile:

a) „Bisectoarele a două unghiuri adiacente complementare formează un unghi cu măsura de …°".

b) „Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează un unghi cu măsura de …°".

PE Aprofundare şi performanţă ***

23. În figura alăturată, punctele A, O, B şi respectiv C, O, D sunt coliniare. Ştiind că $m(\sphericalangle COB) = 45°$, calculaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle AOD$ şi $\sphericalangle BOD$.



24. Diferenţa dintre măsurile a două unghiuri neadiacente care au vârful comun şi o latură comună este de 60°. Calculaţi măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri.

25. Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COB$ astfel încât măsura unghiului format de bisectoarele lor să fie de 30°.

a) Realizaţi un desen care să ilustreze datele problemei; analizaţi toate cazurile posibile.

b) Calculaţi măsura unghiului $\sphericalangle AOC$.

26. Determinaţi două unghiuri complementare, ştiind că $\frac{4}{9}$ din măsura unuia reprezintă cât dublul a $\frac{2}{3}$ din măsura celuilalt.

27. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ şi $\sphericalangle DOE$ astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = 20°$. Ştiind că $[OB$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$, $[OC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$ şi $[OD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOE$, atunci $m(\sphericalangle DOE) = \dots\dots$.

Olimpiada judeţeană Giurgiu, 2002

28. Fie $[OC$ bisectoarea unghiului AOB şi $[OD$ semidreapta opusă semidreptei $[OB$. Ştiind că E şi A se află în acelaşi semiplan determinat de dreapta BD, $m(\sphericalangle EOC) = 90°$, şi $m(\sphericalangle DOE) = 42°15'37"$. Calculaţi $m(\sphericalangle AOB)$. Cercetaţi dacă există un unghi al cărui complement să aibă măsura egală cu jumătate din măsura suplementului său.

Olimpiada judeţeană Satu Mare, 2002

29. Unghiul format de bisectoarele unghiurilor adiacente ABC şi CBD este de 130°.

a) Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle ABD$.

b) Dacă unghiul format de opusa bisectoarei unghiului $\sphericalangle ABD$ cu semidreapta $(BC$ este de 40°, aflaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle CBD$.

Olimpiada judeţeană Ialomiţa, 2000

PE-PP Supermate ****

30. Fie o dreaptă AB, un punct $O \in (AB)$ şi $[OC$ o semidreaptă oarecare. Se notează cu $[OM$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ şi cu $[ON$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$.

a) Realizaţi un desen care să ilustreze situaţia.

b) Folosind judecata, arătaţi că $m(\sphericalangle MON) = 90°$, iar unghiurile $\sphericalangle AOM$ şi $\sphericalangle BON$ sunt complementare.

31. Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ adiacente două câte două, având suma măsurilor lor de 150° şi $b \cdot m(\sphericalangle AOB) = a \cdot m(\sphericalangle BOC)$, $c \cdot m(\sphericalangle BOC) = b \cdot m(\sphericalangle COD)$. Ştiind că a, b, c sunt numere naturale prime ce verifică relaţia $3a + b + 6c = 51$ şi că $[OM$ şi $[ON$ reprezintă bisectoarea unghiurilor $\sphericalangle BOC$, respectiv $\sphericalangle COD$, determinaţi $m(\sphericalangle MON)$.

Olimpiada judeţeană Prahova, 1996

32. Unghiurile $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente complementare, iar D este în semiplanul determinat de OC şi A astfel încât $m(\sphericalangle AOD) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BOC)$, iar $\frac{1}{3}m(\sphericalangle DOC) = \frac{1}{4}m(\sphericalangle BOC)$. Determinaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle AOD$, $\sphericalangle DOC$.

Olimpiada judeţeană Vâlcea, 1998

33. Unghiurile ABC şi ABD sunt complementare neadiacente. Dacă $m(\sphericalangle ABC) = 20°$, aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor respective.

Olimpiada judeţeană Mehedinţi, 1998

5. Unghiuri opuse la vârf. Congruența lor

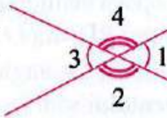
PE-PP

Definiție: Două unghiuri se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă laturile lor sunt perechi de semidrepte opuse.

Unghiurile $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 3$ sunt **opuse la vârf**; de asemenea, unghiurile $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 4$ sunt **opuse la vârf** (fig. 26). Unghiurile $\sphericalangle 5$ și $\sphericalangle 7$ nu sunt opuse la vârf; de asemenea, nu sunt unghiuri opuse la vârf unghiurile $\sphericalangle 6$ și $\sphericalangle 8$ (fig. 27).

Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente. $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$ (fig. 26)

Fig. 26



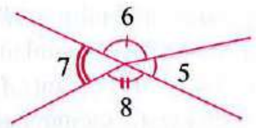


Fig. 27

●●● activități de învățare ●●●

PE Înțelegere *

1. a) Realizați un desen în care să aveți două unghiuri opuse la vârf și complementare. Care este măsura acestora?

b) Aceeași problemă pentru două unghiuri opuse la vârf și suplementare.

2. Calculați măsurile unghiurilor determinate de două drepte concurente, știind că unul dintre ele este:

a) 20°; b) 110°; c) 75°; d) 90°.

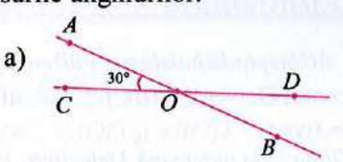
3. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ sunt opuse la vârf, iar $[OM$ și $[ON$ sunt bisectoarele lor. Folosind judecata, aflați m($\sphericalangle MON$). Completați propoziția: „Bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt ... ".

4. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ sunt adiacente suplementare, $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ și $[ON$ este semidreapta opusă semidreptei $[OM$. Folosind judecata, aflați m($\sphericalangle BON$), știind că m($\sphericalangle AOB$) = 30°.

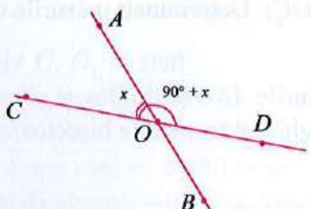
5. Unul dintre unghiurile ce se obțin la intersecția a două drepte concurente are măsura cu 40° mai mică decât a altuia. Calculați măsurile unghiurilor formate de cele două drepte concurente.

6. În figurile de mai jos punctele A, O, B și respectiv C, O, D sunt coliniare. Calculați măsurile unghiurilor.

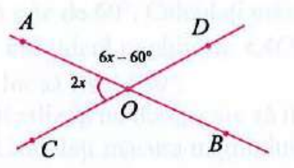
a)



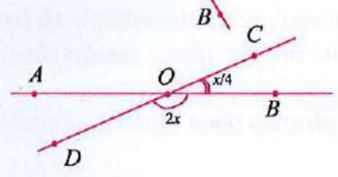
b)



c)



d)



7. Se consideră figura 28.

a) Notați figura și scrieți unghiurile opuse la vârf care s-au format.

b) Folosind judecata, arătați că: m($\sphericalangle 1$) + m($\sphericalangle 2$) + m($\sphericalangle 3$) = 180°.

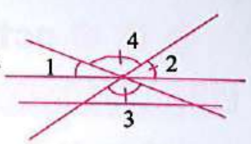


Fig. 28

PE Aplicare și exersare **

8. Avem m($\sphericalangle AOE$) = α° și m($\sphericalangle COB$) = β° (fig. 29). Aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle COD$.

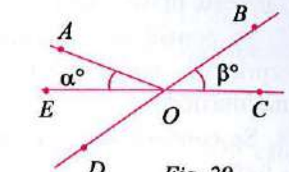


Fig. 29

9. Se consideră două drepte a și b concurente în O. Calculați măsura fiecărui unghi cu vârful O, știind că:

a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este 108°;

b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este 208°.

10. În figura 30 dreptele MN, PQ și RS sunt concurente în O, m($\sphericalangle SOP$) = 90° și m($\sphericalangle RON$) = 25°.

a) Calculați măsurile unghiurilor din figură.

b) Dați exemple de unghiuri complementare.

c) Dați exemple de unghiuri suplementare.

d) Dați exemple de unghiuri opuse la vârf.

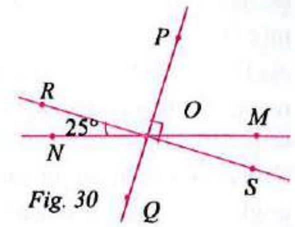


Fig. 30

PE-PP Supermate ****

11. Două drepte sunt concurente. Câte grade are fiecare dintre cele patru unghiuri care se formează, dacă:

a) suma a două dintre ele este de 60°; b) suma a trei dintre ele este de 240°?

12. Bisectoarele unghiurilor adiacente $\sphericalangle xOy$ și $\sphericalangle yOz$ formează un unghi cu măsura de 60°. Știind că $\frac{m(\sphericalangle xOy)}{m(\sphericalangle yOz)} = \frac{2}{3}$, calculați:

a) măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$ și semidreapta opusă lui $[Oy$;

b) măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului $\sphericalangle yOz$ și semidreapta opusă lui $[Ox$.

6. Unghiuri în jurul unui punct. Suma măsurilor lor

PE-PP

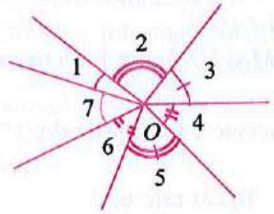
Definiție: Numim **unghiuri în jurul unui punct O** un număr finit de unghiuri având proprietățile:

1. toate au același vârf (punctul O); **2.** orice punct al planului ce nu aparține niciuneia dintre laturile lor aparține interiorului unui singur unghi.

Unghiurile $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$, $\sphericalangle 5$, $\sphericalangle 6$, $\sphericalangle 7$ sunt **unghiuri în jurul punctului O** (fig. 31). Unghiurile $\sphericalangle 8$, $\sphericalangle 9$, $\sphericalangle 10$ **nu sunt unghiuri în jurul punctului Q**, deoarece există puncte ale planului, de exemplu R, care nu aparțin niciunuia din interioarele acestor unghiuri.

Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este de 360°.

Fig. 31



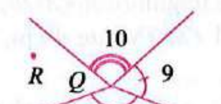


Fig. 32

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Fie figura 33. Unghiurile marcate sunt congruente. Care este măsura lor?

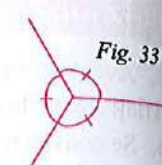


Fig. 33

2. Se consideră cinci unghiuri în jurul unui punct, având măsurile exprimate prin numere naturale consecutive. Calculați măsurile unghiurilor.

3. Se consideră figura 34. Se știe că $m(\sphericalangle AOB) = 31°$, $m(\sphericalangle COB) = 94°$, $m(\sphericalangle COD) = 41°$, $m(\sphericalangle DOE)$ cu 16° mai mare decât $m(\sphericalangle EOF)$ și $m(\sphericalangle AOF) = 80°$. Fără a folosi raportorul, aflați $m(\sphericalangle EOF)$ și $m(\sphericalangle DOF)$.

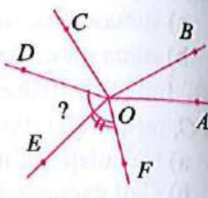


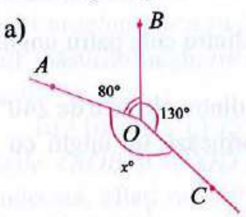
Fig. 34

4. Două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COB$ au ca măsuri 120° și respectiv 90°. Semidreptele $[OM$ și $[ON$ sunt bisectoarele celor două unghiuri. Aflați $m(\sphericalangle MON)$ și $m(\sphericalangle AOC)$.

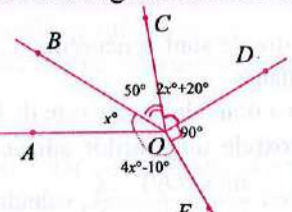
5. Măsura unui unghi format de două drepte concurente este media aritmetică a celorlalte unghiuri. Calculați măsurile unghiurilor.

6. Studiați cu atenție figurile de mai jos și calculați măsurile unghiurilor necunoscute:

a)



b)



PE Aplicare și exersare **

7. Fie dreptele a, b, c concurente în O și se consideră punctele $A, A' \in a$, $B, B' \in b$, $C, C' \in c$, astfel încât $O \in (AA')$, $O \in (BB')$, $O \in (CC')$, $m(\sphericalangle AOB') = 104°$ și $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle C'OB')$.

a) Calculați $m(\sphericalangle AOC)$, $m(\sphericalangle AOC')$ și $m(\sphericalangle A'OB)$.

b) Arătați că $\sphericalangle A'OC' \equiv \sphericalangle COB$.

c) Demonstrați că semidreptele $[OC$ și $[OC'$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle A'OB'$.

8. Fie unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle COB$ adiacente complementare cu $m(\sphericalangle AOC) = 60°$ și fie $[OD$ și $[OE$ semidrepte opuse semidreptelor $[OB$ și respectiv $[OC$.

a) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle BOE$, $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle AOE$.

b) Calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOE$.

9. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COB$ și $\sphericalangle COA$ trei unghiuri în jurul unui punct O, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 2x + 50°$, $m(\sphericalangle COB) = 6x$ și $m(\sphericalangle AOC) = x + 40°$.

a) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COB$ și $\sphericalangle AOC$.

b) Arătați că unghiul $\sphericalangle MON$ este drept, unde $[OM$ și $[ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$.

10. În jurul punctului O se consideră unghiurile adiacente cu măsurile de: 1°, 2°, 3°, ..., $n°$ și un unghi cu măsura de 35°. Calculați:

a) măsura celui mai mare dintre unghiuri; b) cât este n.

PE-PP Supermate ****

11. Aflați măsurile a patru unghiuri formate în jurul unui punct și notate cu a, b, c, d știind că: $2a = 3b = 4c = 6d$.

Olimpiada județeană Satu Mare, 1995

12. În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB, BOC, COD, DOA, $m(\sphericalangle AOB) = 138°$, iar $m(\sphericalangle COD) = 122°$. Știind că $[OE$ este bisectoarea $\sphericalangle AOD$, $[OF$ este bisectoarea $\sphericalangle BOC$, se cer:

a) măsura unghiului $\sphericalangle EOF$;

b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ dacă semidreapta opusă semidreptei $[OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOF$.

Olimpiada județeană Hunedoara, 2002

13. O semidreaptă $[OA$ se rotește în jurul punctului O, parcurgând în 5 secunde un unghi de 162°. Câte grade au unghiurile parcurse în fiecare secundă, dacă fiecare unghi reprezintă jumătate din suma unghiurilor precedente?

Olimpiada județeană Suceava, 2001

14. Determinați numărul unghiurilor adiacente în jurul unui punct, a căror măsură este determinată de numere întregi de grade și măsura unui unghi este dublul unghiului precedent.

Olimpiada județeană Covasna, 1998

PE-PP 7. Recapitulare și sistematizare prin teste

TESTUL 1

1. Dacă semidreptele $[OA$ și $[OB$ coincid, atunci unghiul AOB este ....

2. Măsura suplementului unghiului de 131°21'37" este de ....

3. Dacă două unghiuri sunt adiacente complementare, atunci unghiul format de bisectoarele lor are măsura de ....

4. Latura comună a unghiurilor $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle POM$ este ....

5. Dacă măsura unui unghi este mai mică de 90°, atunci unghiul se numește unghi ....

6. Măsura unui unghi nul este egală cu ....

7. Rezultatul calculului 145°24'30" – 108°17'47" este egal cu ....

8. Desenați cu ajutorul raportorului un unghi cu măsura de 100° și bisectoarea acestuia. Notați corespunzător.

9. Fie $[OC$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ și CM o dreaptă oarecare. Arătați că:

a) dacă $[OM$ este interioară unghiului BOC, atunci măsura unghiului $\sphericalangle COM$ este semidiferența măsurilor unghiurilor $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle BOM$;

b) dacă $[OB$ este interioară unghiului $\sphericalangle COM$, atunci măsura unghiului $\sphericalangle COM$ este egală cu semisuma unghiurilor $\sphericalangle BOM$ și $\sphericalangle AOM$;

c) dacă în situația a) avem $m(\sphericalangle AOB) = 80°$ și $m(\sphericalangle COM) = 10°$, calculați $m(\sphericalangle BOM)$.

TESTUL 2

1. Dacă semidreptele [*OA* şi [*OB* sunt semidrepte opuse, atunci unghiul *AOB* este ....

2. Două unghiuri sunt adiacente dacă ....

3. Măsura complementului unghiului de 43°29'41" este de ....

4. Dacă semidreptele [*OA*, [*OC* şi respectiv [*OB*, [*OD* sunt perechi de semidrepte opuse, atunci unghiurile ∢*AOB* şi ∢*COD* sunt ....

5. Dacă două unghiuri sunt adiacente suplementare, atunci unghiul format de bisectoarele lor are măsura de ....

6. Rezultatul calculului 103° – 57°43'24" este egal cu ....

7. Măsura unui unghi drept este egală cu ....

8. Desenaţi cu ajutorul raportorului un unghi ∢*AOB* cu măsura de 84°. Notaţi cu *A'* simetricul punctului *A* faţă de punctul *O*. Calculaţi măsura unghiului ∢*BOA'*.

9. Se dă unghiul *XOY* şi în acelaşi semiplan cu el se consideră unghiurile ∢*AOB* şi ∢*COD* având ca bisectoare semidreptele [*OX*, respectiv [*OY*. Ştiind că [*OA* şi [*OC* sunt între [*OX* şi [*OY*, arătaţi că:

a) dacă [*OA* este interioară unghiului *XOC*, atunci suma măsurilor unghiurilor ∢*BOD* şi ∢*AOC* este constantă;

b) dacă [*OC* este interioară unghiului *XOA*, atunci diferenţa măsurilor unghiurilor ∢*BOD* şi ∢*AOC* este constantă;

c) în cazul a), pentru m(∢*BOD*) = 120° şi m(∢*AOC*) = 30°, calculaţi suma măsurilor unghiurilor *BOX* şi *DOY*.

TESTUL 3

1. Dacă un unghi este congruent cu complementul său, atunci el are măsura de ....

2. Dacă două unghiuri au acelaşi suplement, atunci ele sunt ......, adică au ....

3. Măsura unui unghi alungit este egală cu ......

4. Proprietăţile relaţiei de congruenţă (≡) sunt: ...., adică......

5. Numim unghiuri în jurul unui punct *O*, unghiurile ......

6. Desenaţi două unghiuri adiacente, ∢*AOB* şi ∢*BOC*, cu m(∢*AOB*) = 40° şi m(∢*BOC*) = = 60°. Măsura unghiului *AOC* va fi egală cu ....

7. Fie ∢*MON* un unghi drept. Pe semidreapta opusă semidreptei [*ON* se ia un punct *P*. Măsura unghiului ∢*MOP* este egală cu ....

8. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu ....

9. Unghiurile ∢*AOB*, ∢*BOC* şi ∢*AOC* sunt unghiuri în jurul unui punct. Ştiind că m(∢*AOB*) este de două ori mai mare decât m(∢*BOC*) şi cu 40° mai mică decât m(∢*AOC*), calculaţi măsurile unghiurilor.

TESTUL 4

1. Dacă un unghi este congruent cu suplementul său, atunci el are măsura de ....

2. Dacă două unghiuri au acelaşi complement, atunci ele sunt ....., adică au ....

3. Dacă măsura unui unghi este mai mare de 90°, atunci unghiul se numeşte unghi ....

4. Dacă măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct sunt exprimate prin numere naturale consecutive, atunci acestea sunt: ......°, ...°, ...°, ...°, ...°.

5. Desenaţi două unghiuri ∢*AOB* ş ∢*BOC* astfel încât [*OC* să aparţină interiorului unghiului ∢*AOB* şi m(∢*AOB*) = 80°, iar m(∢*BOC*) = 30°. Măsura unghiului ∢*AOC* este egală cu ....

6. Unghiul ∢*PQR* se numeşte unghi propriu dacă ....

7. Unghiul format de bisectoarele a două unghiuri adiacente are măsura de 37°40'. Suma măsurilor celor două unghiuri este egală cu ....

8. Rezultatul calculului 29°17'29" – 14°24'52" este egal cu ....

9. Fie unghiurile ∢*AOB*, ∢*BOC* şi ∢*COA* în jurul punctului *O*, astfel încât m(∢*AOB*) = = m(∢*BOC*). Folosind judecata, arătaţi că semidreapta opusă semidreptei [*OB* este bisectoarea unghiului ∢*AOC*.

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Dacă laturile unui unghi sunt semidrepte opuse, atunci unghiul ....

(0,5p) **2.** Două unghiuri se numesc adiacente dacă ....

(0,5p) **3.** Bisectoarea unui unghi este ....

(0,5p) **4.** Complementul unghiului cu măsura de 27°34'17" este unghiul cu măsura de ....

(0,5p) **5.** Două unghiuri sunt opuse la vârf dacă ....

(0,5p) **6.** Unghiul cu măsura mai mică de 90° se numește ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Suplementul unghiului cu măsura de 108°43'29" este unghiul cu măsura de:

A. 71°13'16" B. 71°16'13" C. 71°31'16" D. 71°16'31"

(0,5p) **2.** Rezultatul calculului 43°28'15" + 19°17'24" – 16°13'21" este:

A. 46°21'13" B. 46°23'18" C. 46°18'32" D. 46°32'18"

(0,5p) **3.** Două unghiuri proprii cu laturile perechi de semidrepte opuse se numesc unghiuri:

A. nule B. alungite C. opuse la vârf D. în jurul unui punct

(0,5p) **4.** În jurul unui punct O se construiesc 8 unghiuri congruente. Măsura fiecărui unghi este de:

A. 60° B. 90° C. 45° D. 75°

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** a) Desenați două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ cu măsurile de 40° și respectiv de 60°.

b) Calculați măsura unghiului $\sphericalangle AOC$.

(1p) **2.** Calculați măsura unui unghi, știind că aceasta este egală cu jumătate din măsura complementului său.

(1p) **3.** Calculați măsura unui unghi, știind că aceasta este cu 60° mai mare decât măsura suplementului său.

(1p) **4.** a) Construiți unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ astfel încât m($\sphericalangle AOB$) = 50° și m($\sphericalangle BOC$) = = 70°. Câte posibilități aveți?

b) Calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ pentru fiecare posibilitate.

Capitolul III
Triunghiul

PP Competențe specifice:

- C1. Identificarea triunghiurilor în configurații geometrice date
- C2. Utilizarea instrumentelor geometrice (riglă, echer, raportor, compas) pentru a desena figuri geometrice plane descrise în contexte matematice date
- C3. Stabilirea congruenței triunghiurilor oarecare
- C4. Clasificarea triunghiurilor după anumite criterii date sau alese
- C5. Exprimarea proprietăților figurilor geometrice în limbaj matematic
- C6. Interpretarea cazurilor de congruență a triunghiurilor în corelație cu cazurile de construcție a triunghiurilor
- C7. Aplicarea metodei triunghiurilor congruente în rezolvarea unor probleme matematice sau practice

PE-PP 1. Triunghiul: definiție, vârfuri, laturi, unghiuri. Perimetrul triunghiului

Definiție: Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C, se numește **triunghi determinat de punctele A, B, C** mulțimea $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ (fig. 1).

Triunghiul determinat de punctele necoliniare A, B, C se notează ΔABC.

Punctele A, B, C se numesc **vârfurile triunghiului.**

Segmentele $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ se numesc **laturile triunghiului.**

Unghiurile $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAB$ se numesc **unghiurile triunghiului.**

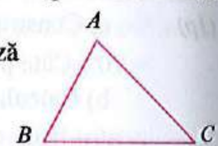


Fig. 1

Pentru lungimile laturilor și măsurile unghiurilor unui triunghi se obișnuiesc următoarele notații: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $m(\sphericalangle BAC) = A$, $m(\sphericalangle ABC) = B$, $m(\sphericalangle ACB) = C$.

Suma lungimilor laturilor unui triunghi se numește **perimetrul triunghiului.** Așadar, perimetrul unui triunghi ΔABC este:

$$\mathcal{P} = AB + BC + CA = a + b + c.$$

Semisuma lungimilor laturilor unui triunghi se numește **semiperimetrul triunghiului** și se notează cu p, unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Se numește unghi exterior unui triunghi unghiul adiacent și suplementar cu un unghi al triunghiului.

În figura 2, unghiurile exterioare sunt: 1, 2, 3, 4, 5 și 6.

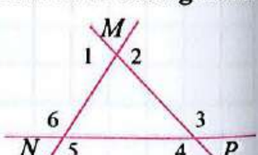


Fig. 2

Observații: Dacă ABC este un triunghi și dacă se notează cu P planul din care face parte triunghiul, atunci:

a) $int(\sphericalangle ABC) \cap int(\sphericalangle ACB) \cap int(\sphericalangle CAB) = int(\Delta ABC)$;

b) $P - [\Delta ABC \cup int(\Delta ABC)] = ext(\Delta ABC)$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Desenați trei puncte necoliniare M, N, P și triunghiul determinat de cele trei puncte. Denumiți vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului.

2. Desenați un triunghi ABC și precizați:

a) latura opusă a unghiului $\sphericalangle A$; b) unghiul opus laturii $[AB]$;

c) unghiurile alăturate laturii $[BC]$.

3. Fie patru puncte P, Q, R, H astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Câte triunghiuri determină cele patru puncte? Denumiți aceste triunghiuri.

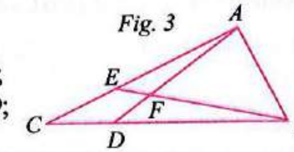
4. Priviți figura 3. Scrieți apoi:

a) triunghiurile din figură care au ca latură comună pe $[AB]$;

b) triunghiurile din figură care au ca unghi comun pe $\sphericalangle FBD$;

c) numărul triunghiurilor din figură.

Fig. 3



5. Urmăriți figura 4 și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $Q \in \Delta MNP$; b) $S \in int(\Delta MNP)$;

c) $R \notin \Delta MNP$; d) $T \in int(\Delta MNP)$;

e) $T \notin ext(\Delta MNP)$; f) $S \in ext(\Delta MNP)$.

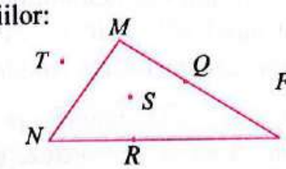


Fig. 4

6. Fie s unul din semiplanele determinate de o dreaptă d. Desenați două triunghiuri care să aibă o latură comună inclusă în d și câte un vârf în semiplanul s.

7. Desenați un triunghi MNP și fixați punctele:

a) A și B în interiorul triunghiului; b) C și D care să aparțină triunghiului;

c) E și F în exteriorul triunghiului.

PE Aplicare și exersare **

8. Calculați perimetrul un triunghi dacă:

a) semiperimetrul este 5,7 cm;

b) $AB = 4$ cm, $BC = \dfrac{3}{4} \cdot AB$ și lungimea laturii $[AC]$ este media aritmetică a lungimilor laturilor $[AB]$ și $[BC]$.

c) $AB = 30$ mm, $BC = 1{,}8$ cm și $AC = 0{,}24$ dm.

9. Aflați lungimile laturilor unui triunghi ABC știind că:

a) perimetrul triunghiului este de 9,6 cm, AC este cu 0,8 cm mai mare decât AB și reprezintă $\dfrac{4}{5}$ din BC.

b) perimetrul este 24 cm și lungimile laturilor sunt numere naturale pare, consecutive.

10. Se consideră un triunghi ABC și $D \in [AB]$. Calculați lungimea laturii $[BD]$ dacă perimetrele triunghiurilor ACD, BCD și ABC sunt egale cu 11 cm, 9 cm și respectiv 14 cm.

PE-PP 2. Construcția triunghiurilor

Se dă următoarea problemă: Construiți un triunghi ΔABC cunoscând:
a) două laturi și unghiul determinat de ele;
b) o latură și unghiurile alăturate ei;
c) cele trei laturi.

Exemple:

- **Construiți un triunghi ΔABC cunoscând că $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm și $m(\sphericalangle A) = 30°$.**

Rezolvare: Desenăm un unghi XAY cu măsura de 30° și construim pe semidreptele $[AX$, respectiv $[AY$ segmentele $[AB]$ și $[AC]$ astfel încât $AB = 4$ cm și $AC = 3$ cm (fig. 5). Punând în evidență segmentul $[CB]$, se obține triunghiul.

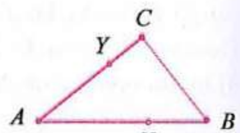


Fig. 5

- **Construiți un triunghi ΔABC cunoscând că $m(\sphericalangle A) = 30°$, $AB = 3{,}5$ cm și $m(\sphericalangle B) = 60°$.**

Rezolvare: Construim un segment $[AB]$ de lungime 3,5 cm, apoi, cu ajutorul raportorului, semidreptele $[AX$ și $[BY$ astfel încât $m(\sphericalangle XAB) = 30°$ și $m(\sphericalangle YBA) = 60°$. Vârful C al triunghiului este intersecția semidreptelor $[AX$ și $[BY$ (fig. 6).

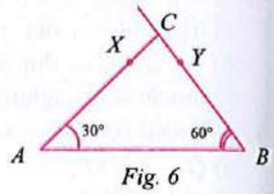


Fig. 6

Observație: Desigur, se poate întâmpla ca cele două semidrepte să nu se intersecteze și deci triunghiul să nu existe. De exemplu, dacă se cere ca segmentul $[AB]$ să aibă lungimea de 3 cm, iar unghiurile A și B să aibă măsurile respectiv de 100° și 120°, semidreptele $[AX$ și $[BY$ nu se intersectează (fig. 7).

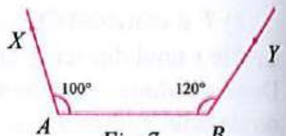


Fig. 7

- **Construiți un triunghi ΔABC cunoscând $AB = 2{,}5$ cm, $AC = 1$ cm și $BC = 2$ cm.**

Rezolvare: Procedăm astfel (fig. 8): construim un segment $[AB]$ cu lungimea de 2,5 cm; construim cercul $\mathscr{C}$ cu centrul în A și de rază 1 cm; construim cercul $\mathscr{C}'$ cu centrul în B și de rază 2 cm; notăm cu C unul dintre punctele de intersecție ale celor două cercuri. Triunghiul determinat de punctele A, B și C este triunghiul căutat. Într-adevăr, $AB = 2{,}5$ cm, $AC = 1$ cm (raza cercului $\mathscr{C}$), iar $BC = 2$ cm (raza cercului $\mathscr{C}'$).

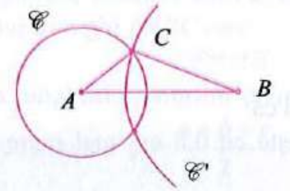


Fig. 8

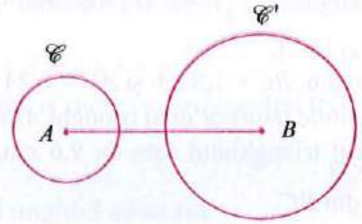


Fig. 9

Observații:

1. Problema are două soluții corespunzătoare celor două puncte de intersecție ale cercurilor $\mathscr{C}$ și $\mathscr{C}'$.
2. Pot apărea situații când problema nu are nicio soluție, deoarece cele două cercuri pot să nu se intersecteze (de exemplu, dacă se cere ca $AB = 3$ cm, $AC = 1$ cm și $BC = 1{,}5$ cm – fig. 9) sau să se intersecteze într-un singur punct, iar acesta să nu convină (vezi mai jos exercițiul 10c)).

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Perimetrul unui triunghi cu toate laturile congruente este egal cu 12 cm. Construiți triunghiul.

2. Construiți un triunghi ABC știind că: $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și complementul unghiului $\sphericalangle B$ este de 30°.

3. Construiți un triunghi ABC, cunoscând că:
a) $AC = 5$ cm, $BC = 7$ cm și $m(\sphericalangle C) = 140°$;
b) $AB = 6$ cm, $BC = 1$ cm și $m(\sphericalangle B) = 55°$.

4. Construiți un triunghi ABC, cunoscând că:
a) $BC = 3$ cm, $m(\sphericalangle B) = 60°$ și $m(\sphericalangle C) = 90°$;
b) $AC = 4{,}5$ cm, $m(\sphericalangle A) = 40°$ și $m(\sphericalangle C) = 105°$.

5. Construiți un triunghi ABC, cunoscând că:
a) $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 5$ cm; b) $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 3$ cm.

6. Construiți un triunghi ABC, știind că $[AB] \equiv [AC]$ și:
a) $AB = 4$ cm, $m(\sphericalangle A) = 36°$;
b) $AB = 35$ mm, $m(\sphericalangle A) = 140°$;
c) $AB = 5$ cm, $BC = 5{,}5$ cm.

7. Construiți un triunghi ABC cu laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$ de lungime 3 cm, respectiv 4 cm, știind că $m(\sphericalangle A) = 90°$.

8. Construiți un triunghi care să aibă toate laturile de 6 cm.

9. Construiți un triunghi ABC, cu $AB = 4$ cm, $BC = 42$ mm, $CA = 28$ mm, apoi calculați perimetrul și semiperimetrul acestuia.

PE Aplicare și exersare **

10. Explicați de ce nu există (nu se poate construi) un triunghi ΔABC astfel încât:
a) $m(\sphericalangle B) = 90°$, $BC = 4$ cm și $m(\sphericalangle C) = 100°$;
b) $AB = 3{,}5$ cm, $m(\sphericalangle A) = 180°$ și $AC = 5$ cm;
c) $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 2$ cm;
d) $AB = 9$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 3$ cm.

PE-PP

3. Triunghi isoscel, echilateral, dreptunghic, obtuzunghic, ascuţitunghic

Definiţie: Un triunghi în care oricare două laturi nu sunt congruente se numeşte **scalen** sau **oarecare**.

Definiţie: Un **triunghi cu două laturi congruente** se numeşte triunghi **isoscel.** Cea de-a treia latură se numeşte **baza**[1] triunghiului isoscel.

În figura 10 este desenat un **triunghi isoscel**. În desen sunt puse în evidenţă **laturile congruente** $[AB] \equiv [AC]$, deci $[BC]$ este **baza triunghiului.** Pentru a construi un **triunghi isoscel** procedăm astfel: construim un unghi $\sphericalangle XAY$, apoi pe laturile acestuia construim segmentele congruente $[AB] \equiv [AC]$ şi punem în evidenţă segmentul $[BC]$. Altfel spus, construcţia triunghiului presupune date două laturi (laturile congruente) şi unghiul dintre ele.

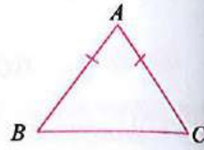


Fig. 10

Definiţie: Un **triunghi cu toate laturile congruente** se numeşte triunghi **echilateral.**

În figura 11a) este desenat un **triunghi echilateral**. În desen sunt puse în evidenţă **laturile congruente**: $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA]$.

Pentru a construi un **triunghi echilateral** procedăm astfel: construim un segment $[BC]$, apoi dăm deschiderii compasului o lungime egală cu lungimea acestui segment şi cu centrul în B, respectiv în C, trasăm două arce de cerc care să se intersecteze (fig. 11b)); intersecţia lor este vârful A al triunghiului. Deci, construcţia este un caz particular al construcţiei unui triunghi când se cunosc lungimile laturilor.

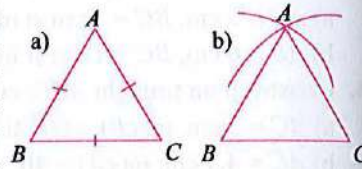


Fig. 11

Observaţie: Un triunghi echilateral este totodată şi un triunghi isoscel: nu numai două dintre laturile lui sunt congruente, ci toate trei.

Definiţie: Un **triunghi care are un unghi drept** se numeşte triunghi **dreptunghic.** Latura care se opune unghiului drept se numeşte **ipotenuză.** Celelalte două laturi se numesc **catete.**

În figura 12 este desenat un **triunghi dreptunghic**: $m(\sphericalangle A) = 90°$, $[BC]$ este **ipotenuză**, iar $[AB]$ şi $[AC]$ sunt **catete.** Construcţia triunghiului dreptunghic presupune date catetele, unghiul dintre ele fiind de 90°.

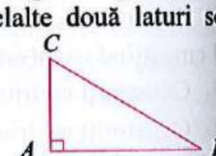


Fig. 12

Definiţie: Un **triunghi care are un unghi obtuz** se numeşte triunghi **obtuzunghic.**

În figura 13 este desenat un **triunghi obtuzunghic.** Avem $m(\sphericalangle A) > 90°$. Construcţia triunghiului obtuzunghic presupune date două laturi şi unghiul obtuz determinat de ele.

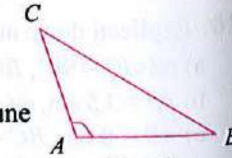


Fig. 13

[1] Foarte probabil că denumirea de „bază" provine din preferinţa de a desena triunghiul isoscel cu „baza în jos". Desigur, această preferinţă nu impune din punct de vedere geometric nimic. De altfel, şi în această carte apar frecvent triunghiuri isoscele „cu baza în sus".

Definiţie: Un **triunghi care are toate unghiurile ascuţite** se numeşte triunghi **ascuţitunghic.**

În figura 14 este desenat un **triunghi ascuţitunghic**. Avem: $m(\sphericalangle A) < 90°$, $m(\sphericalangle B) < 90°$, $m(\sphericalangle C) < 90°$. Una din modalităţile posibile de a construi un triunghi ascuţitunghic, dată deocamdată fără justificare, este următoarea: se presupune dată o latură şi unghiurile alăturate ei care trebuie să fie ascuţite; în plus, avem grijă ca suma acestor două unghiuri să fie mai mare decât un unghi drept. Justificarea acestui fapt o vom da mai târziu.

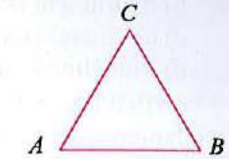


Fig. 14

Un unghi se numeşte **unghi exterior unui triunghi** dacă este **adiacent şi suplementar** cu unul din unghiurile triunghiului.

Observaţii:

1. Unghiurile $\sphericalangle ABD$ şi $\sphericalangle CBE$ din figura 15 sunt **unghiuri exterioare** corespunzătoare vârfului B.
2. Unghiurile $\sphericalangle ABD$ şi $\sphericalangle CBE$ sunt congruente, fiind opuse la vârf.

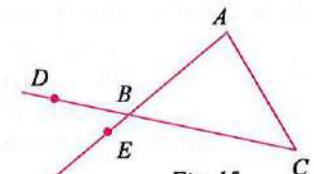


Fig. 15

● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Când spunem că un triunghi este isoscel? Dar echilateral? Dar dreptunghic? Dar obtuzunghic? Dar ascuţitunghic?

2. Construiţi un triunghi: a) scalen; b) isoscel; c) echilateral; d) dreptunghic (şi) isoscel; e) obtuzunghic; f) ascuţitunghic.

3. Construiţi un triunghi dreptunghic. Precizaţi unghiul drept, ipotenuza şi catetele acestuia.

4. Un triunghi dreptunghic ΔPQR are catetele $[PQ]$ şi $[QR]$. Precizaţi care este ipotenuza şi care este unghiul drept.

5. Precizaţi vârful şi baza unui triunghi isoscel ΔMNR în fiecare din următoarele cazuri:
a) $[MN] = [NR]$; b) $[MR] \equiv [RN]$; c) $[RM] \equiv [MN]$.

6. Indicaţi vârful şi baza triunghiului isoscel ABC ştiind că:
a) $[AB] \equiv [AC]$; b) $[AB] \not\equiv [AC]$.

PE Aplicare şi exersare **

7. Se consideră triunghiul echilateral ABC. Calculaţi:
a) latura triunghiului dacă perimetrul este 24,6 cm;
b) perimetrul triunghiului dacă latura este 4,2 cm.

8. Calculaţi perimetrul unui triunghi isoscel ştiind că:
a) $AB = AC = 4$ cm şi $BC = 5$ cm; b) $AB = 6$ cm, $AC = 5$ cm.
Câte soluţii are problema?

9. Stabiliţi natura triunghiului MNP dacă:
a) $m(\sphericalangle M) = 110°$; b) $MN = 4$ cm, $MP = 4$ cm şi $m(\sphericalangle M) = 90°$;
c) $MN = 3{,}2$ cm, $NP = 0{,}32$ dm şi $MP = 32$ mm.

10. Completați spațiile punctate:

a) un triunghi cu un unghi exterior drept este un triunghi ....

b) un triunghi cu un unghi exterior ascuțit este un triunghi ....

c) un triunghi cu toate unghiurile exterioare obtuze este un triunghi ....

d) triunghiul ce are toate unghiurile exterioare congruente este un triunghi ....

11. Aflați lungimile laturilor unui triunghi isoscel și construiți triunghiul, știind că o latură are lungimea de 4 cm și că perimetrul triunghiului este de 13 cm.

PE-PP 4. Congruența triunghiurilor

Să ne reamintim că **două segmente sunt congruente** dacă au aceeași lungime; la fel, **două unghiuri sunt congruente** dacă au aceeași măsură.

Unghiurile din fig. 16 **sunt congruente** (au măsura de 40°). Un mod de a descrie această situație este să spunem că oricare dintre aceste unghiuri poate fi așezat pe oricare altul astfel încât vârfurile și laturile lor să coincidă.

Același lucru se poate spune despre **segmentele congruente** din fig. 17.

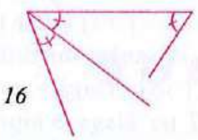


Fig. 16

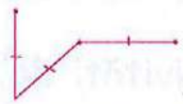


Fig. 17

Ce-ar însemna două **triunghiuri congruente**? (fig. 18).

Ar însemna că putem așeza unul dintre triunghiuri peste celălalt astfel încât ele să coincidă. Natural, în această situație, fiecare latură a unui triunghi este congruentă cu câte o latură a celuilalt și fiecare unghi al unui triunghi este congruent cu câte un unghi al celuilalt triunghi.

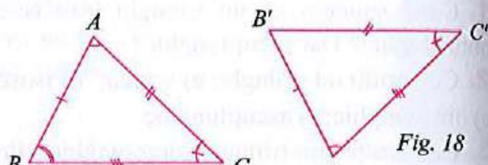


Fig. 18

REȚINEȚI! Fiind date două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$, dacă avem relațiile: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, $[BC] \equiv [B'C']$, $[AC] \equiv [A'C']$, $[AB] \equiv [A'B']$, atunci spunem că ΔABC și $\Delta A'B'C'$ sunt *congruente* și scriem: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

În scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle A'$ se numesc **unghiuri corespunzătoare**. La fel se numesc unghiurile $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle B'$, precum și unghiurile $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle C'$ (fig. 19).

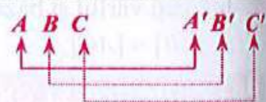


Fig. 19

Laturile ce se opun unghiurilor corespunzătoare se numesc **laturi corespunzătoare**. Astfel, de exemplu, laturile $[BC]$ și $[B'C']$ sunt laturi corespunzătoare (ele se opun unghiurilor corespunzătoare $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle A'$). Acum se observă că:

Două triunghiuri care au unghiurile respectiv congruente și laturile respectiv congruente sunt congruente.

Cuvântul *respectiv* precizează că este vorba de unghiuri corespunzătoare sau de laturi corespunzătoare. Să mai observăm că scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ nu este totuna cu scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$ pentru că, de exemplu, unghiurile corespunzătoare în a doua situație sunt altele decât cele din prima situație. Deci, în scrierea $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ ordinea literelor contează.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. a) Când spunem că două triunghiuri sunt congruente?

b) Știind că $\Delta MNP \equiv \Delta QRS$, numiți unghiurile corespunzătoare congruente și laturile corespunzătoare congruente.

2. Explicați de ce scrierea $\Delta MNP \equiv \Delta QRS$ este *echivalentă* (reprezintă același lucru) cu scrierea $\Delta NMP \equiv \Delta RQS$.

3. În figura 20 triunghiurile sunt congruente, congruențele între segmente fiind marcate pe figură. Este corectă scrierea $\Delta QRS \equiv \Delta UVT$? Explicați de ce! Scrieți cum este corect!

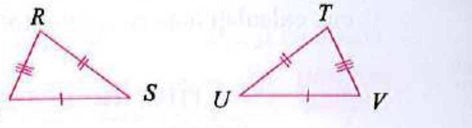


Fig. 20

4. Observați că din $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ rezultă că $\Delta ACB \equiv \Delta A'C'B'$ și încă alte patru astfel de relații. Scrieți-le pe toate!

5. Ce fel de triunghi este ΔABC dacă putem scrie $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$?

6. Congruența între triunghiuri are aceleași proprietăți ca și congruența între segmente, adică este simetrică, reflexivă și tranzitivă. Scrieți aceste proprietăți!

PE Aplicare și exersare **

7. Ce fel de triunghi este ΔABC dacă putem scrie $\Delta ABC \equiv \Delta ACB \equiv \Delta CBA$?

8. Ce relații trebuie să existe între elementele unui triunghi ΔABC pentru a fi posibile simultan congruențele:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ și $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$?

b) $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, $\Delta ABC \equiv \Delta A'C'B'$ și $\Delta ABC \equiv \Delta B'C'A'$?

9. Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta PHD$ și $m(\sphericalangle A) = 30°$, $m(\sphericalangle B) = 45°$, $m(\sphericalangle C) = 105°$, precizați măsurile unghiurilor triunghiului ΔPHD.

10. Știind că $\Delta ABC \equiv \Delta QRH$ și $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm, precizați lungimile laturilor triunghiului ΔQRH.

11. a) Este adevărată propoziția: „dacă $[AB] \equiv [QR]$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle Q$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta QRP$”?

b) Completați astfel încât să obțineți o propoziție adevărată: „dacă $[AB] \equiv [QR]$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle Q$, ..., atunci $\Delta ABC \equiv \Delta QRP$”.

12. Se consideră triunghiurile congruente $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$. Se știe că $AB = 4$ cm, $m(\sphericalangle A) = 60°$ și $AC = 8$ cm.

a) Construiți triunghiul ABC.

b) Scrieți perechile de unghiuri congruente ale triunghiurilor.

c) Scrieți lungimile laturilor $[MN]$ și $[MP]$.

PE Aprofundare și performanță ***

13. Se consideră triunghiurile congruente $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

a) Dacă $MN = 4$ cm, $NP = 3$ cm și $MP = 5$ cm, calculați lungimile laturilor triunghiului ABC.

b) Dacă $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 30°$ și $m(\sphericalangle C) = 60°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului MNP.

14. Fie unghiul $\sphericalangle XOY$ și $A \in [OX$, $B \in [OY$. Dacă $[OC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$ astfel încât $\Delta AOC \equiv \Delta COB$, stabiliți natura triunghiurilor AOB și ABC.

15. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci ele au unghiurile respectiv congruente.

b) Dacă două triunghiuri au unghiurile respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

16. Se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta NPM$, $AC = 5$ cm și $m(\sphericalangle NMP) = 40°$. Calculați MN și $m(\sphericalangle ACB)$.

17. Se consideră triunghiurile ΔABC și $\Delta A'B'C'$ astfel încât $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. Dacă $AB + A'B' = 10$ cm, $AC + A'B' = 15$ cm și perimetrul triunghiului $A'B'C'$ este egal cu 21 cm, calculați lungimile laturilor triunghiului ABC.

PE-PP 5. Criteriile (cazurile) de congruență ale triunghiurilor

Lucrare practică: Construiți pe o bucată de carton un triunghi cunoscând lungimile a două laturi, 7 cm și 9 cm, și unghiul determinat de cele două laturi, 35°, apoi decupați triunghiul cu ajutorul unei foarfeci. Repetați lucrarea pe altă bucată de carton. Se obțin două triunghiuri și se verifică prin suprapunere că ele sunt congruente. Deducem astfel experimental următorul adevăr denumit:

Cazul L.U.L. de congruență (latură-unghi-latură). Două triunghiuri care au două laturi și unghiul determinat de ele respectiv congruente sunt *congruente*.

Acest adevăr se enunță mai precis astfel:

Oricare ar fi două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$,
dacă $[AB] \equiv [A'B']$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $[BC] \equiv [B'C']$,
atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (fig. 21).

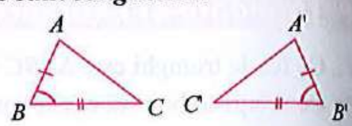


Fig. 21

Lucrare practică: Construiți pe o bucată de carton un triunghi cunoscând lungimea unei laturi, 8 cm, și unghiurile alăturate acesteia, de 45° și 60°. Cu ajutorul unei foarfeci decupați triunghiul astfel construit și repetați lucrarea pe o altă bucată de carton. Se obțin două triunghiuri și se verifică prin suprapunere că sunt congruente. Se deduce astfel experimental următorul adevăr denumit:

Cazul U.L.U. de congruență (unghi-latură-unghi). Două triunghiuri care au o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente sunt *congruente*.

Acest adevăr se enunță mai precis astfel:

Oricare ar fi două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$,
dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $[AB] \equiv [A'B']$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$,
atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (fig. 22).

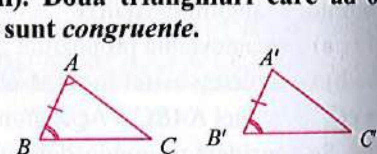


Fig. 22

Lucrare practică: Construiți pe o bucată de carton un triunghi cunoscând lungimile laturilor acestuia, 8 cm, 9 cm și 11 cm. Cu ajutorul unei foarfeci decupați triunghiul astfel construit și apoi repetați lucrarea pe o altă bucată de carton. Se obțin două triunghiuri și se verifică prin suprapunere că sunt congruente. Se deduce astfel experimental următorul adevăr denumit:

Cazul L.L.L. de congruență (latură-latură-latură). Două triunghiuri care au laturile respectiv congruente sunt *congruente*.

Acest adevăr se enunță mai precis astfel:

Oricare ar fi două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$,
dacă $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$, $[BC] \equiv [B'C']$,
atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (fig. 23).

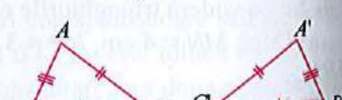


Fig. 23

Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci la laturi congruente se opun unghiuri congruente și, invers, la unghiuri congruente se opun laturi congruente.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Scrieți cazurile de congruență ale triunghiurilor.

2. Construcția unui triunghi congruent cu un triunghi dat.

Fie ΔABC un triunghi dat (fig. 24a)). Pentru a construi un triunghi congruent cu acesta procedăm în felul următor (fig. 24b)):

(1) construim un segment $[MN] \equiv [BC]$;

(2) dăm compasului o deschidere egală cu AB;

(3) cu vârful compasului fixat în punctul M trasăm un arc de cerc;

(4) dăm compasului o deschidere egală cu AC;

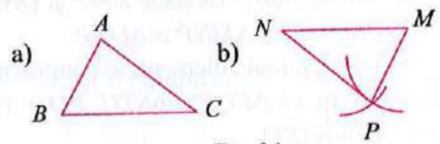


Fig. 24

(5) cu vârful compasului fixat în punctul N, trasăm un alt arc de cerc care se intersectează cu primul;

(6) notăm, de exemplu, cu P intersecția celor două arce de cerc. Astfel, $\Delta ABC \equiv \Delta PMN$.

a) Ce caz de congruență justifică construcția de mai sus?

b) ΔPMN este „copia" triunghiului ΔABC. Desenați în caietul vostru un triunghi oarecare și, utilizând procedeul indicat, „copiați" alăturat triunghiul.

c) Descrieți în pași încă două procedee de a construi un triunghi congruent cu un triunghi dat.

3. Construiți două triunghiuri congruente.

4. Construiți două triunghiuri congruente cu o latură comună.

5. Fie ΔABC și ΔMNP două triunghiuri.

a) Dacă $[AB] \equiv [MP]$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle P$, $[AC] \equiv [PN]$ și $[BC] = 5$ cm, aflați MN. Justificați.

b) Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle N$, $[AB] \equiv [NP]$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle P$ și $m(\sphericalangle C) = 75°$, aflați $m(\sphericalangle M)$. Justificați.

c) Dacă $[AB] \equiv [PM]$, $[BC] \equiv [MN]$, $[AC] \equiv [PN]$ și $m(\sphericalangle A) = 37°$, aflați $m(\sphericalangle P)$. Justificați.

6. Numiți perechile de triunghiuri congruente din desenul de mai jos (fig. 25). Justificați congruența triunghiurilor, precizând cazul de congruență folosit.

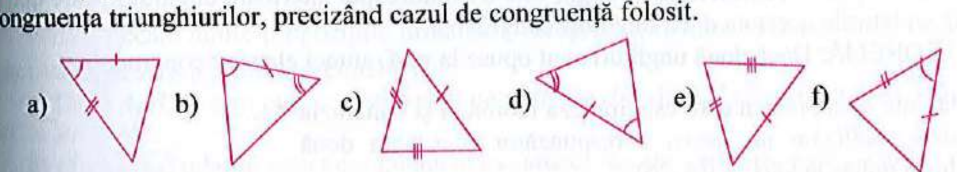


Fig. 25

7. Completați astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Dacă $[MN] \equiv [HR]$, $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle R$ și $[NP] \equiv [RD]$, atunci Δ .... $\equiv \Delta$ ....

b) Dacă $[LM] \equiv [ZY]$, $\sphericalangle L \equiv \sphericalangle Z$ și $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle Y$, atunci Δ .... $\equiv \Delta$ ....

c) Dacă $[SV] \equiv [CD]$, $[VR] \equiv [DB]$ și $[SR] \equiv [CB]$, atunci Δ .... $\equiv \Delta$ ....

PE Aplicare şi exersare **

8. Pe laturile unghiului $\sphericalangle XOY$ se consideră punctele: $A, B \in [OX$ şi $C, D \in [OY$ astfel încât $[OA] \equiv [OC]$ şi $[OB] \equiv [OD]$.

a) Arătaţi că $\Delta COB \equiv \Delta DOA$.

b) Scrieţi toate elementele congruente ale celor două triunghiuri.

9. Pe laturile unghiului $\sphericalangle XOY$ se consideră punctele: $A \in [OX$, $B \in [OY$ şi $[OC$ este bisectoarea unghiului astfel încât $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle BCO$.

a) Arătaţi că $\Delta AOC \equiv \Delta COB$.

b) Scrieţi toate elementele congruente ale celor două triunghiuri.

10. Triunghiurile isoscele MNP şi QNP au baza comună $[NP]$ şi $[MP] \equiv [QP]$.

a) Arătaţi că $\Delta MNP \equiv \Delta QNP$.

b) Scrieţi toate elementele congruente ale celor două triunghiuri.

11. Se ştie că $\Delta PQR \equiv \Delta STU$, $PQ = 4$ cm şi $m(\sphericalangle SUT) = 60°$. Calculaţi $m(\sphericalangle QRP)$ şi lungimea laturii $[ST]$.

12. Se consideră un triunghi isoscel ΔMNP cu $[MN] \equiv [MP]$ şi punctele $A \in (MN)$ şi $B \in (MP)$ astfel încât $[MA] \equiv [NA]$ şi $[MB] \equiv [PB]$. Arătaţi că $\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle MAP$.

PE-PP 6. Elemente de raţionament geometric[1]

Unele propoziţii matematice poartă denumirea de **axiome** şi adevărurile exprimate de acestea se acceptă fără demonstraţie. Alte propoziţii matematice poartă denumirea de **definiţii**; prin ele se introduc noţiuni noi. Propoziţiile care se deduc prin raţionamente (judecăţi) din axiome şi definiţii se numesc **teoreme**.

Orice teoremă se poate enunţa astfel: „dacă ..., atunci ...". Partea din enunţul teoremei care urmează după *dacă* prezintă ceea ce este dat, ceea ce se presupune adevărat şi se numeşte *ipoteza teoremei*; partea care urmează după *atunci* anunţă ceea ce trebuie să se demonstreze pe baza a ceea ce este dat şi se numeşte *concluzia teoremei*.

Exemple:

AXIOMĂ: Două puncte diferite aparţin unei drepte şi numai unei singure drepte.

DEFINIŢIE: Bisectoarea unui unghi este o semidreaptă interioară unghiului, care determină cu laturile acestuia două unghiuri congruente.

TEOREMĂ: Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci ele sunt congruente.

Înainte de a preciza care este ipoteza teoremei şi concluzia acesteia, realizăm un desen corespunzător (desenăm două unghiuri opuse la vârf – fig. 26).

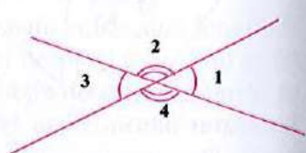


Fig. 26

Ipoteza teoremei este: $\hat{1}$ şi $\hat{3}$ opuse la vârf.

Concluzia teoremei este: $\hat{1} \equiv \hat{3}$

Demonstraţia teoremei: Aceasta trebuie să convingă pe oricine că, acceptând ipoteza, concluzia nu poate în niciun caz să fie falsă. Să ne reamintim această demonstraţie:

[1] Introducerea noţiunilor de: axiomă, definiţie, teoremă, ipoteză, concluzie şi demonstraţie.

Avem următoarele relaţii: $m(\hat{1}) + m(\hat{2}) = 180°$ (de ce? pentru că suma unghiurilor $\hat{1}$ şi $\hat{2}$ este un unghi alungit) şi $m(\hat{3}) + m(\hat{2}) = 180°$ (din acelaşi motiv). Scăzând aceste două relaţii, obţinem: $m(\hat{1}) - m(\hat{3}) = 0°$, de unde $m(\hat{1}) = m(\hat{3})$, adică $\hat{1} \equiv \hat{3}$ (conform definiţiei congruenţei a două unghiuri) şi astfel concluzia teoremei este dovedită.

Observaţie: De acum încolo, rolul principal în stabilirea de proprietăţi ale figurilor geometrice îl va avea nu evidenţa desenului, ci raţionamentul (judecata). Cu alte cuvinte, treptat-treptat vom învăţa să facem demonstraţii.

activităţi de învăţare

PE Înţelegere *

1. Citiţi fiecare dintre enunţurile care urmează, apoi scrieţi o completare logică a concluziilor lor:

a) *Ipoteza:* Elevii care învaţă au note bune.
Eu învăţ întotdeauna.
Concluzia: Eu ....

b) *Ipoteza:* Ori de câte ori este meci pe stadion, Sandu este acolo.
Astăzi este meci.
Concluzia: Sandu ....

c) *Ipoteza:* Tuturor copiilor le place joaca.
Fratele meu are nouă ani.
Concluzia: Fratelui meu ....

2. Găsiţi ipoteza şi concluzia în fiecare dintre propoziţiile următoare:

a) Dacă a, b, c sunt trei numere naturale şi b se divide cu a, iar c se divide cu b, atunci c se divide cu a.

b) Dacă un număr natural a se divide cu un număr natural m şi un număr b se divide cu acelaşi număr natural m, atunci şi suma lor se divide cu m.

c) Dacă a, m şi n sunt numere naturale şi $a \neq 0$, $m \leq n$, atunci $a^n : a^m = a^{n-m}$.

d) Dacă a, b, c sunt numere naturale şi $b \geq c$, atunci $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

e) Dacă $a = b$ şi $b = c$, atunci $a = c$, oricare ar fi a, b, c numere naturale.

Indicaţie: a) *Ipoteza:* $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \mid b$, $b \mid c$. *Concluzia:* $a \mid c$.

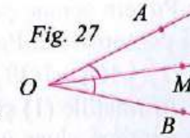
3. Pentru fiecare dintre propoziţiile următoare faceţi desenul care să ilustreze situaţia respectivă, apoi scrieţi ipoteza şi concluzia:

a) Dacă A, B, C sunt puncte aparţinând unei drepte d şi dacă B aparţine lui (AC), atunci $AC = AB + BC$.

b) Dacă două unghiuri sunt complementare, atunci fiecare dintre ele este ascuţit.

4. Dacă $(OM$ este o semidreaptă inclusă în interiorul $\sphericalangle AOB$, atunci: $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOB)$.

Fig. 27



Indicaţie: figura 27.

Ipoteza: $(OM \subset \text{int}\sphericalangle AOB$. *Concluzia:* $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOB)$.

PE Aplicare și exersare **

5. Se consideră următoarea propoziție: „Dacă două unghiuri au măsurile egale, atunci ele sunt numite unghiuri congruente". Ce este această propoziție: o axiomă, o definiție sau o teoremă? Justificați!

6. Se consideră următoarea propoziție: „Dacă două unghiuri sunt adiacente și suplementare, atunci bisectoarele lor determină un unghi drept".

a) Este acest enunț o teoremă? Justificați.

b) Realizați un desen care să ilustreze teorema, scrieți ipoteza, concluzia și demonstrația acesteia.

7. Pentru fiecare dintre propozițiile ce urmează faceți desenul care să ilustreze situația respectivă, apoi scrieți ipoteza și concluzia:

a) Bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt semidrepte opuse.

b) Bisectoarele a două unghiuri adiacente complementare formează un unghi cu măsura de 45°.

8. Completați propozițiile și specificați dacă sunt definiții, axiome sau teoreme.

a) Triunghiul isoscel este …

b) Un triunghi care are un unghi obtuz …

c) Dacă $\sphericalangle MON$, $\sphericalangle NOP$, $\sphericalangle POQ$ și $\sphericalangle QOM$ sunt unghiuri în jurul unui punct, atunci …

9. Formulați reciprocele pentru următoarele teoreme, scriind ipoteza și concluzia.

a) Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci complementele lor sunt congruente.

b) Dacă două unghiuri sunt congruente, atunci suplementele lor sunt congruente.

10. Pentru fiecare dintre propozițiile ce urmează faceți desenul care să ilustreze situația respectivă, scrieți ipoteza și concluzia și apoi realizați demonstrația.

a) Dacă două unghiuri sunt congruente și complementare, atunci fiecare dintre ele are 45°.

b) Dacă două unghiuri sunt congruente și suplementare, atunci fiecare dintre ele are 90°.

PE-PP 7. Metoda triunghiurilor congruente

Metoda triunghiurilor congruente este o metodă de demonstrație prin care se demonstrează de regulă că două segmente sau două triunghiuri sunt congruente.

Exemplu: Dacă două segmente $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc O, demonstrați că $[AC] \equiv [BD]$.

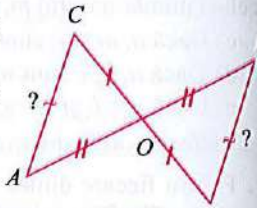


Fig. 28

Pentru a demonstra această congruență desenăm două segmente $[AB]$ și $[CD]$ cu același mijloc O. Enunțăm apoi ipoteza și concluzia (fig. 28).

Ipoteza: $O \in (AB)$, $[AO] \equiv [BO]$;

$O \in (CD)$, $[CO] \equiv [DO]$.

Concluzia: $[AC] \equiv [BD]$.

Punem semne pe figură pentru a indica ce congruențe sunt date și ce congruențe se cer a fi demonstrate. Pentru demonstrație, să considerăm următoarele afirmații:

(1) $[AO] \equiv [OB]$; (2) $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$; (3) $[CO] \equiv [OD]$.

Afirmațiile (1) și (3) sunt adevărate, deoarece, conform definiției mijlocului unui segment, ele exprimă chiar ipoteza teoremei. Afirmația (2) este și ea adevărată, pentru că unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt unghiuri opuse la vârf, iar despre unghiurile opuse la vârf știm că sunt congruente. Din afirmațiile (1), (2) și (3) și criteriul L.U.L. de congruență rezultă afirmația:

(4) $\Delta AOC \equiv \Delta BOD$,

iar din definiția congruenței triunghiurilor rezultă afirmația:

(5) $[AC] \equiv [BD]$,

care este chiar concluzia, ceea ce trebuia demonstrat.

Mai jos oferim un model de redactare pentru această demonstrație.

Demonstrație

(1) $[AO] \equiv [OB]$	din ipoteză și definiția mijlocului unui segment
(2) $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$	ca unghiuri opuse la vârf
(3) $[CO] \equiv [OD]$	din ipoteză și definiția mijlocului unui segment
(4) $\Delta AOC \equiv \Delta BOD$	din (1), (2), (3) și criteriul L.U.L.
(5) $[AC] \equiv [BD]$	din (4) și def. congruenței triunghiurilor.

Observați că fiecare afirmație este justificată. Acesta este un lucru esențial: ori de câte ori faceți o afirmație într-o demonstrație, trebuie să o justificați!

Observație:

- Enunțul problemei poate fi reformulat însoțind figura 28 de următoarea scriere: $[AO] \equiv [OB]$ și $[CO] \equiv [OD] \Rightarrow [AC] \equiv [BD]$.
- Citim: „dacă segmentul $[AO]$ este congruent cu segmentul $[OB]$ și segmentul $[CO]$ este congruent cu segmentul $[OD]$, atunci segmentul $[AC]$ este congruent cu segmentul $[BD]$".

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Copiați și completați ipoteza, concluzia și demonstrația.

Se consideră figura 29. Știind că $[AB] \equiv [CB]$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$, demonstrați că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD$.

Ipoteza: ...

Concluzia: ...

Demonstrația:

(1) $[AB] \equiv [CB]$ (din ipoteză)

(2) $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ ....

(3) $[BD] \equiv [BD]$ ....

(4) $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ ....

(5) $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD$ ....

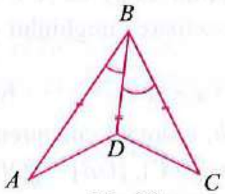


Fig. 29

2. Scrieți ipoteza, concluzia și demonstrația. Se consideră figura 30. Știind că $m(\sphericalangle CDB) = 90°$ și $[AD] \equiv [BD]$, demonstrați că $[AC] \equiv [BC]$.

3. Scrieți ipoteza, concluzia și demonstrația. Se consideră figura 31. Știind că $\sphericalangle BCF \equiv \sphericalangle DAE$, $[FC] \equiv [AE]$ și $\sphericalangle BFC \equiv \sphericalangle DEA$, demonstrați că $[DE] \equiv [BF]$.

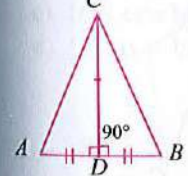


Fig. 30

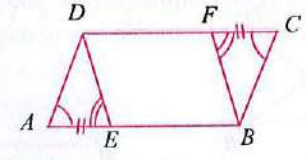


Fig. 31

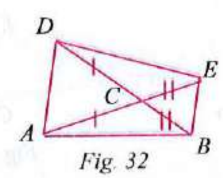


Fig. 32

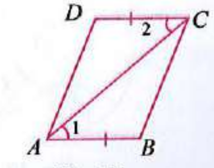


Fig. 33

4. Se consideră punctele coliniare A, O, B, respectiv C, O, D astfel încât $[AO] \equiv [BO]$ și $[CO] \equiv [DO]$. Demonstrați că:

a) $[AC] \equiv [BD]$; b) $[AD] \equiv [BC]$; c) $\Delta ACD \equiv \Delta BDC$; d) $\Delta ADB \equiv \Delta BCA$.

5. Se consideră figura 32. Segmentele $[BD]$ și $[AE]$ se intersectează astfel încât $[AC] \equiv [DC]$ și $[BC] \equiv [EC]$. Demonstrați că $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle BDE$.

6. Se consideră figura 33. Știind că $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$ și $[AB] \equiv [DC]$, demonstrați că $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle CAD$.

7. Se consideră figura 34. Știind că $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, demonstrați că $[AM] \equiv [MB]$.

8. Se consideră figura 35. Știind că O și Q sunt centrele celor două cercuri, demonstrați că $[OQ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$.

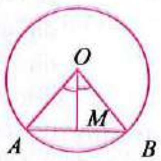


Fig. 34

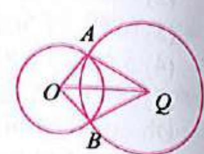


Fig. 35

9. Se consideră figura 36. Știind că ΔABC este un triunghi isoscel cu baza BC, $[AN] \equiv [AM]$ și $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle MAC$, demonstrați că $[BN] \equiv [MC]$.

PE Aplicare și exersare **

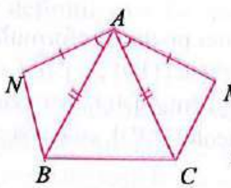


Fig. 36

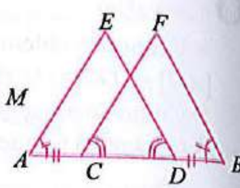


Fig. 37

10. Se consideră figura 37. Știind că $[AC] \equiv [DB]$, $\sphericalangle FCD \equiv \sphericalangle EDC$ și $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle FBC$, demonstrați că $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle CFB$.

11. Se consideră figura 38. Știind că $AC = BC$, $DC = EC$, G este mijlocul lui DC, H este mijlocul lui EC și $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle BCD$, demonstrați că $AG = BH$.

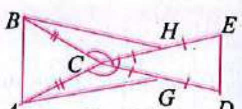


Fig. 38

12. Fie unghiul $\sphericalangle xOy$ cu $A \in (Ox$, $B \in (Oy$ astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ și fie C un punct situat pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$ astfel încât A, B și C să fie necoliniare. Demonstrați că:

a) $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle BCO$; b) $[AC] \equiv [BC]$.

13. Fie a, b, c drepte concurente în O și punctele $A, A' \in a$, $B, B' \in b$, $C, C' \in c$ astfel încât $[OA] \equiv [OA']$, $[OB] \equiv [OB']$, $[OC] \equiv [OC']$ și A, B, C să fie necoliniare. Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

14. Fie triunghiul ABC cu O mijlocul segmentului $[BC]$ și $D \in AO$ astfel încât $[AO] \equiv [OD]$. Demonstrați că:

a) $\Delta AOB \equiv \Delta DOC$; b) $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$.

15. În figura 39 cercurile au același centru și punctele O, A, B, respectiv O, C, D sunt coliniare. Demonstrați că $[AD] \equiv [BC]$.

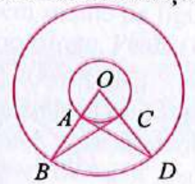


Fig. 39

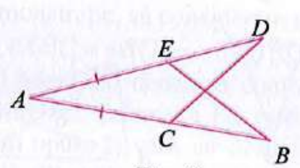


Fig. 40

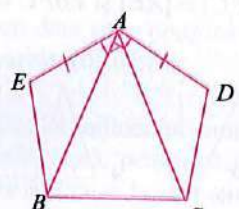


Fig. 41

16. Pe laturile unui unghi cu vârful în A se iau punctele B, C, D și E astfel încât $[AD] \equiv [AB]$, $[AE] \equiv [AC]$ (fig. 40). Demonstrați că $[BE] \equiv [CD]$.

17. Fie triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$, $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle CAE) = 90°$ și $[AD] \equiv [AE]$ (fig. 41). Demonstrați că:

a) $\Delta ADB \equiv \Delta AEC$; b) $[EB] \equiv [DC]$.

PE Aprofundare și performanță ***

18. Se consideră un unghi $\sphericalangle XOY$, punctele $A \in [OX$, $B \in [OY$ astfel încât $OA = OB$ și un punct M interior unghiului astfel încât $MA = MB$. Știind că $m(\sphericalangle MOA) = 37°30'$, calculați $m(\sphericalangle AOB)$.

19. Fie triunghiul ABC și $D \in (AC)$, $E \in (BC)$ astfel încât $[CD] \equiv [CE]$ și $m(\sphericalangle CDB) = m(\sphericalangle CEA)$. Demonstrați că:

a) $[AC] \equiv [BC]$; b) $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EBD$; c) $[AD] \equiv [BE]$.

20. În triunghiul isoscel ABC cu baza $[BC]$ se consideră punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $[BD] \equiv [CE]$. Demonstrați că:

a) $[BE] \equiv [CD]$;

b) $\Delta DFB \equiv \Delta EFC$, unde $DC \cap BE = \{F\}$;

c) $[AF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$;

d) $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle EFA$.

21. Se consideră un triunghi dreptunghic ΔABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AC = 4$ cm și $AB = 3$ cm și punctele $M \in CA$, $N \in AB$, astfel încât $A \in (CM)$, $B \in (AN)$, $AM = 3$ cm și $BN = 1$ cm. Demonstrați că:

a) $[BC] \equiv [MN]$; b) $\sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle BCA$; c) $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$.

22. Fie triunghiul ABC și $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ cu $BE \cap CD = \{F\}$, $[BF] \equiv [CF]$ și $[DF] \equiv [EF]$. Demonstrați că:

a) $[BD] \equiv [CE]$; b) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$; c) $\sphericalangle FBC \equiv \sphericalangle FCB$.

23. Fie un unghi $\sphericalangle MIR$ și punctele $N, U \in (IM$, $L, T \in (IR$ astfel încât $[IN] \equiv [IL]$ și $[IU] \equiv [IT]$. Dacă $UL \cap TN = \{A\}$, atunci demonstrați că:

a) $[LT] \equiv [NU]$;

b) $[IA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle LIN$;

c) $[AI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NAL$;

d) $[AU] \equiv [AT]$.

24. Pe laturile unghiului ascuțit $\sphericalangle xOy$ se consideră punctele $M, N \in (Ox$ și $P, Q \in (Oy$ astfel încât $[OM] \equiv [OP]$, $\sphericalangle OMQ \equiv \sphericalangle OPN$. Dacă $MQ \cap NP = \{R\}$, atunci demonstrați că:

a) $[ON] \equiv [OQ]$;

b) $[MN] \equiv [PQ]$;

c) $[OR$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOP$;

d) $[RO$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MRP$.

PE-PP 8. Recapitulare şi sistematizare prin teste

TESTUL 1

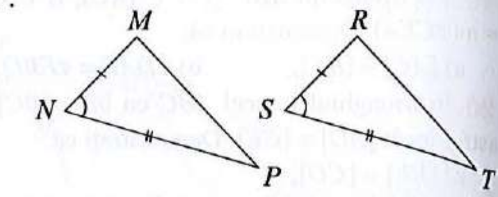
1. Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente sunt ...., conform cazului de congruenţă ....

2. În triunghiul ABC, latura opusă unghiului $\sphericalangle A$ este ......, iar unghiul opus laturii $[AB]$ este ....

3. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, atunci $[AB] \equiv$ ......, $[EF] \equiv$ ......, $\sphericalangle B \equiv$ ......, iar $\sphericalangle D \equiv$ ....

4. În triunghiul ABC se ştie că $90° < m(\sphericalangle BAC) < 135°$.
Triunghiul ABC este ....

5. În figura alăturată se ştie că $[MN] \equiv [RS]$, $[ST] \equiv [NP]$ şi $\sphericalangle RST \equiv \sphericalangle MNP$.



a) $\Delta MNP \equiv$ ....;
b) $[MP] \equiv$ ....;
c) $\sphericalangle STR \equiv$ ....;
d) $\sphericalangle PMN \equiv$ ....

6. Construiţi un triunghi DEF, ştiind că $AB = 6$ cm, $m(\sphericalangle BAC) = 45°$, $m(\sphericalangle ABC) = 75°$.

7. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C şi D (în această ordine) astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD]$. Fie E un punct exterior dreptei, astfel ca $[AE] \equiv [DE]$ şi $F \in (ED)$ cu $[FE] \equiv [FD]$, respectiv $P \in (AE)$ cu $[AP] \equiv [PE]$, Demonstraţi că:
a) $[AF] \equiv [DP]$; b) $\Delta APC \equiv \Delta DFB$; c) $\Delta APB \equiv \Delta DFC$.

TESTUL 2

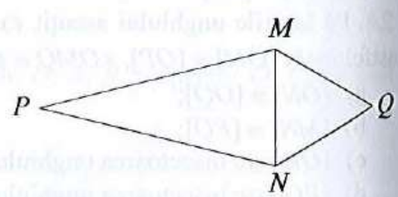
1. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $AC = 4$ cm, $NP = 5$ cm şi perimetrul triunghiului MNP este egal cu 12 cm, atunci $AB =$ ...... cm.

2. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$, atunci triunghiul ABC este .... cu ....

3. Un triunghi isoscel are o latură cu lungimea de 24 cm şi alta cu lungimea de 30 cm. Perimetrul triunghiului este egal cu ...... cm sau ...... cm.

4. Două triunghiuri echilaterale care au perimetrele egale sunt ...., conform cazului de congruenţă ....

5. În figura alăturată triunghiurile MNP şi MNQ sunt isoscele, cu baza MN.



a) $m(\sphericalangle PMN) =$ ....;
b) $m(\sphericalangle PNQ) =$ ....;
c) $[MQ] \equiv$ ....;
d) $[PQ$ este ....

6. Construiţi un triunghi ABC, ştiind că $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm şi $BC = 6$ cm.

7. În triunghiul ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$, considerăm D mijlocul laturii $[BC]$ şi $P, Q \in (BC)$ astfel încât $[BP] \equiv [PQ] \equiv [QC]$. Pe prelungirea lui $[AD]$ considerăm E astfel încât $[DE] \equiv [AD]$. Dacă $EQ \cap AC = \{M\}$ şi $PE \cap AB = \{N\}$, demonstraţi că:
a) $\sphericalangle DEQ \equiv \sphericalangle DEP$; b) ΔAMN este isoscel; c) $\sphericalangle QMC \equiv \sphericalangle PNB$.

TESTUL 3

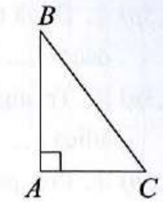
1. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$, atunci ΔABC este ......, cu ....

2. Prin axiomă se înţelege ....

3. Criteriile de congruenţă ale triunghiurilor sunt ....

4. Dacă ABC şi MNP sunt două triunghiuri echilaterale care au acelaşi perimetru, atunci ΔABC ...... ΔMNP din cazul de congruenţă ....

5. În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic, cu măsura unghiului A de 90°.



a) Unghiul opus catetei $[AB]$ este ....
b) Unghiul ascuţit alăturat catetei $[AC]$ este ....
c) Ipotenuza triunghiului este ....
d) Cateta opusă unghiului B este ....

6. Construiţi un triunghi MNP, ştiind că $MN = 6$ cm, $MP = 5$ cm şi $m(\sphericalangle M) = 110°$.

7. Fie O mijlocul segmentului $[AB]$. De o parte şi de alta a dreptei AB se iau punctele C şi D astfel încât $[OC] \equiv [OD]$ şi $[AC] \equiv [BD]$.
a) Demonstraţi că unghiul COD este alungit.
b) Ce puteţi afirma despre segmentele AD şi BC?
c) Demonstraţi că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$.

TESTUL 4

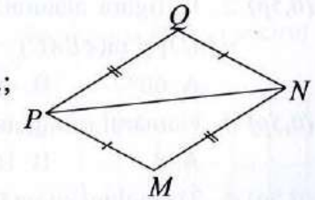
1. Teoremele sunt propoziţii adevărate care ....

2. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, atunci ....

3. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ şi $DE = 4$ cm, $m(\sphericalangle DEF) = 75°$, $BC = 5$ cm şi $m(\sphericalangle BAC) = 60°$, atunci $EF =$ ...... cm, $AB =$ ...... cm, $m(\sphericalangle EDF) =$ ......°, $m(\sphericalangle ABC) =$ ......°.

4. Dacă triunghiul ABC este isoscel cu lungimea laturii $BC = 6$ cm şi perimetrul egal cu 18 cm, atunci triunghiul ABC este ....

5. În figura alăturată se ştie că: $[MN] \equiv [QP]$ şi $[PM] \equiv [QN]$.



a) $\Delta MNP \equiv$ ...., conform cazului de congruenţă ......;
b) $m(\sphericalangle PQN) =$ ....;
c) $m(\sphericalangle PNM) =$ ....;
d) $m(\sphericalangle QNP) =$ ....

6. Construiţi un triunghi ABC, ştiind că $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm şi măsura suplementului unghiului B este egală cu 120°.

7. Fie triunghiul ABC, cu $AB = AC$, şi fie $Q \in (AB)$, $P \in (AC)$ astfel încât $[AP] \equiv [AQ]$. Pe prelungirea laturii $[BC]$ se iau punctele M şi N astfel încât $B \in (MC)$, $C \in (BN)$ şi $[BM] \equiv [CN]$. Demonstraţi că:
a) $[AM] \equiv [AN]$;
b) $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle ANQ$;
c) $\Delta MPC \equiv \Delta NQB$.

PE Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu.*

I. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi propoziţii adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Două triunghiuri *ABC* şi *MNP* se numesc congruente şi notăm ....

dacă ....

(0,5p) **2.** Triunghiul *ABC* este isoscel dacă ....,

adică .... sau .... sau ....

(0,5p) **3.** Prin perimetrul triunghiului *ABC* se înţelege ....,

adică $\mathcal{P}_{\Delta ABC}$ = ... + ... + ...

(0,5p) **4.** Se numeşte unghi exterior unui triunghi *ABC* unghiul ....

(0,5p) **5.** În triunghiul *ABC* se ştie m($\sphericalangle ABC$) = 120°. Triunghiul *ABC* este un triunghi

....

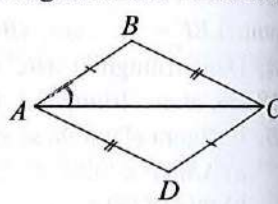
(0,5p) **6.** Triunghiul *ABC* este dreptunghic cu m($\sphericalangle A$) = 90°. Catetele triunghiului sunt:

.... şi ....

II. Încercuiţi răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Lungimile laturilor unui triunghi isoscel sunt exprimate prin numere naturale. O latură a triunghiului are lungimea de 5 cm, iar perimetrul triunghiului este de 16 cm. Produsul lungimilor celorlalte două laturi este egal cu:

A. 25 cm^2 B. 15 cm^2 C. 30 cm^2 D. 55 cm^2

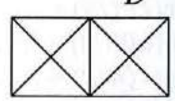


(0,5p) **2.** În figura alăturată se ştie că: [*AB*] ≡ [*CD*], [*BC*] ≡ [*AD*] şi m($\sphericalangle BAC$) = 45°. Măsura $\sphericalangle DCA$ este egală cu:

A. 60° B. 45° C. 30° D. 40°

(0,5p) **3.** Numărul triunghiurilor din figura alăturată este:

A. 8 B. 16 C. 12 D. 10



(0,5p) **4.** Triunghiul cu un unghi exterior ascuţit este un triunghi:

A. ascuţitunghic B. dreptunghic C. obtuzunghic D. echilateral

III. Scrieţi rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Construiţi triunghiul *ABC*, ştiind că *AB* = 6 cm, m($\sphericalangle ABC$) = 60° şi *BC* = 8 cm.

(1p) **2.** Se consideră două segmente [*AB*] şi [*A'B'*]. Cele două segmente au acelaşi mijloc, punctul *O*. Realizaţi un desen care să ilustreze datele problemei.

(1p) **3.** Se ştie că ΔABC este isoscel, cu [*AB*] ≡ [*AC*] şi punctele *D* ∈ [*AB*], *E* ∈ [*AC*], astfel încât [*AD*] ≡ [*DB*] şi [*DE*] ≡ [*EC*]. Arătaţi că [*BE*] ≡ [*CD*].

(1p) **4.** Într-un triunghi isoscel *ABC*, lungimea unei laturi este 5 cm, iar perimetrul 15 cm. Care este produsul celor trei laturi ale triunghiului?

PE-PP Probleme pentru pregătirea concursurilor şcolare

1. Fie unghiurile ABC şi ABD neadiacente, astfel încât $m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle ABD) = 90^\circ$. Calculaţi măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri.
Olimpiada judeţeană Alba, 1996

2. Se consideră $O \in [AC]$, iar punctele B şi D sunt de o parte şi de alta a dreptei AC, astfel încât $\Delta OCB \equiv \Delta OCD$. Arătaţi că $[AB] \equiv [AD]$. *Olimpiada municipiului Bucureşti, 1995*

3. Fie C un punct pe dreapta AB, $C \in (AB)$. Punctele M şi N sunt în acelaşi semiplan faţă de AB astfel încât M este în interiorul $\sphericalangle NCB$ şi $m(\sphericalangle MCN) = 60^\circ$ şi $\Delta CBM \equiv \Delta CAN$.
a) Câte grade are $\sphericalangle BCM$? Justificaţi.
b) Stabiliţi dacă $(NC$ este bisectoarea $\sphericalangle ANM$. *Olimpiada municipiului Bucureşti, 1996*

4. De o parte şi de alta a segmentului $[AB]$ se consideră segmentele congruente $[AC]$ şi $[BD]$ astfel încât $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$. Ştiind că dreapta CD intersectează segmentul $[AB]$ în punctul M, arătaţi că M este mijlocul segmentului $[AB]$. *Olimpiada judeţeană Neamţ, 1996*

5. Triunghiul ABC are $AB < AC$. Bisectoarea $(AY$ a unghiului adiacent suplementar lui $\sphericalangle BAC$ intersectează prelungirea laturii BC în M. Pe AY se construieşte $[AN]$ congruent cu segmentul $[AM]$. Bisectoarea $\sphericalangle BAC$ intersectează latura BC în D, iar ND intersectează AC în E. Demonstraţi că:
a) ΔMDN este isoscel; b) $\Delta AMB \equiv \Delta ANE$. *Olimpiada judeţeană Hunedoara, 2000*

6. În interiorul triunghiului ABC ($[AB] \equiv [AC]$) se ia punctul P astfel încât $[PB] \equiv [PC]$. Semidreapta $(CP$ intersectează (AB) în M, iar semidreapta $(BP$ intersectează (AC) în N. Arătaţi că:
a) $[MB] \equiv [NC]$; b) $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PAC$. *Olimpiada judeţeană Caraş Severin, 1998*

7. Se dă unghiul alungit $\sphericalangle AOE$, iar în acelaşi semiplan se construiesc unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ şi $\sphericalangle DOE$ ale căror măsuri îndeplinesc condiţia:
$$m(\sphericalangle AOB) = \frac{1}{5} m(\sphericalangle BOC) = \frac{1}{4} m(\sphericalangle COD) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle DOE).$$
Aflaţi măsurile acestor unghiuri.

8. Demonstraţi că două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ care au perimetre egale, $[AC] \equiv [A'C']$ şi $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ sunt triunghiuri congruente. *Olimpiada judeţeană Vâlcea, 1990*

9. Punctele A, B, C, D, în această ordine, sunt coliniare, iar M şi N, situate în semiplane diferite faţă de dreapta celor patru puncte, astfel încât $\Delta ABM \equiv \Delta ABN$. Arătaţi că $\Delta CDM \equiv \Delta CDN$. *Olimpiada judeţeană Dâmboviţa, 1997*

10. Două unghiuri adiacente, $\sphericalangle XOY$ şi $\sphericalangle YOZ$, sunt congruente, iar $A \in (OX$, $M \in (OY$, $B \in (OZ$, astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ şi A, M, B necoliniare.
a) Arătaţi că ΔAMB este isoscel.
b) Dacă $AB \cap OM = \{T\}$, demonstraţi că $m(\sphericalangle ATM) = 90^\circ$.
c) Dacă $(OZ'$ este semidreapta opusă lui $(OZ$ şi $m(\sphericalangle XOZ) = 73^\circ37'$, calculaţi $m(\sphericalangle YOZ)$.
Concursul „Dan Barbilian", 1994

11. Fie C un punct pe $[AB]$. Punctele M şi N sunt situate în acelaşi semiplan determinat de dreapta AB astfel încât M se află în interiorul unghiului NCB, $m(\sphericalangle MCN) = 80^\circ$ şi $\Delta CBM \equiv \Delta CAN$. Determinaţi măsura $\sphericalangle ACN$. *Olimpiada judeţeană Constanţa, 1997*

12. Triunghiurile ABC şi CDA sunt congruente, iar $[AC] \cap [BD] \neq \varnothing$. Fie $M, N \in [AC]$, $N \neq M$ astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Cercetaţi dacă $\Delta DMN \equiv \Delta BNM$.
Olimpiada judeţeană Galaţi, 1997

13. Punctul D este situat în interiorul unghiului propriu ACB astfel încât $[AD \cap [BC] = \{M\}$, iar $[BD \cap [AC] = \{N\}$. Dacă $[ND] \equiv [MD]$, iar $\sphericalangle AND$ şi $\sphericalangle CMA$ sunt suplementare, arătaţi că:
a) $[AN] \equiv [BM]$; b) $[DC$ este bisectoarea $\sphericalangle NDM$.
Olimpiada judeţeană Vâlcea, 1998

14. Fie unghiul propriu xOy şi semidreptele interioare unghiului $(Oa$, $(Ob$, $(Oc$ astfel încât $(Oa \subset \text{Int}(\sphericalangle xOb)$, $(Oc \subset \text{Int}(\sphericalangle yOb)$, iar $\sphericalangle xOa \equiv \sphericalangle yOc$. Luăm punctele $A \in (Ox$, $B \in (Ob$, $C \in (Oa$, $D \in (Oc$, $E \in (Oy$ astfel încât $[OA] \equiv [OE]$, $[OC] \equiv [OD]$, $C \notin AB$, $D \notin BE$. Arătaţi că:
a) dacă $[Ob$ este bisectoarea unghiului xOy, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta EBD$;
b) dacă $\Delta ABC \equiv \Delta EBD$, atunci $[Ob$ este bisectoarea $\sphericalangle xOy$.
Olimpiada judeţeană Maramureş, 2000

15. Pe segmentul $[PQ]$ se consideră punctul R, iar punctele E şi F sunt de aceeaşi parte a dreptei PQ. Ştiind că $\Delta REP \equiv \Delta RQF$ şi $m(\sphericalangle FRQ) = 37^\circ25'$, determinaţi $m(\sphericalangle ERF)$.
Olimpiada judeţeană Giurgiu, 2001

16. Fie ΔABC oarecare şi în exterior se construiesc triunghiurile isoscele ABM şi CAN, cu $[AB] \equiv [AM]$, $[AC] \equiv [AN]$, iar $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle CAN)$. Arătaţi că $[MC] \equiv [BN]$.
Olimpiada judeţeană Iaşi, 2001

17. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C şi D în această ordine, astfel încât $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD]$. Fie E un punct exterior dreptei d astfel încât $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle EDA$ şi fie P şi F mijloacele segmentelor $[AE]$ respectiv $[ED]$. Arătaţi că:
a) $[AF] \equiv [DP]$; b) $\Delta APB \equiv \Delta DFC$; c) $\sphericalangle BPE \equiv \sphericalangle CFE$; d) $\Delta PBE \equiv \Delta FCE$.
Olimpiada judeţeană Satu Mare, 2001

18. Fie ΔABC cu semiperimetrul de 12 cm, $AB = 60\%$ din BC, iar AC este media aritmetică a lungimilor laturilor $[AB]$ şi $[BC]$.
a) Aflaţi lungimile laturilor ΔABC.
b) Dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ ale ΔABC, $D \in CM$ astfel încât $[DM] \equiv [MC]$, $E \in NP$ astfel încât $[PE] \equiv [PN]$, demonstraţi că:
1) $AE = \frac{1}{2} BC$; 2) $[AD] \equiv [BC]$. *Olimpiada judeţeană Alba, 2002*

19. Fie ΔABC, E mijlocul laturii (BC), $M \in (AE)$, $\{P\} = BM \cap AC$ şi $\{Q\} = CM \cap AB$. Demonstraţi că dacă $(MB) \equiv (MC)$, atunci:
a) $(AB) \equiv (AC)$; b) $(PB) \equiv (QC)$. *Olimpiada judeţeană Braşov, 2002*

20. Fie unghiul propriu $\sphericalangle AOD$ şi semidreptele $[OB$ şi $[OC$ în interiorul său, astfel încât $[OB$ să fie în interiorul unghiului AOC şi $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$. Ştiind că $[AO] \equiv [OD]$, $[BO] \equiv [OC]$, iar M şi N sunt mijloacele segmentelor AB respectiv CD, arătaţi că $[DM] \equiv [AN]$.
Olimpiada judeţeană Timiş, 2002

Modele de teze semestriale

• *Din oficiu (pentru toate testele): 1 punct. Timp de lucru: 50 de minute.*

TEZA 1

(0,8p) **1.** Calculați $(3^9 : 3^6 + 2^4 : 2) : 7$.

(0,8p) **2.** Calculați $\frac{5}{24} + \frac{7}{36} - \frac{1}{48}$.

(0,8p) **3.** Comparați $a = \frac{1}{4}$ și $b = 0,(3)$.

(0,8p) **4.** Dacă semidreptele $[OA$ și $[OB$ coincid, aflați măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.

(0,8p) **5.** Un unghi are măsura 80°. Determinați măsura unghiului format de o latură a sa și prelungirea celeilalte.

(0,8p) **6.** Specificați numărul divizorilor numărului 54.

(0,7p) **7.** Scrieți numerele $x \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\frac{5}{2x-1}$ este supraunitară.

(0,7p) **8.** Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{1}{2}$. Determinați măsura unghiului mai mare.

(0,7p) **9.** Fie triunghiul ascuțitunghic ΔABC cu $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Perpendiculara dusă în mijlocul segmentului $[BC]$ intersectează latura $[AC]$ în punctul M. Aflați perimetrul triunghiului ΔABM.

(0,7p) **10.** Fie numerele 960 și 64.
a) Descompuneți numerele în factori primi.
b) Calculați cel mai mare divizor comun al numerelor.

(1,4p) **11.** Fie triunghiul ΔABC ascuțitunghic și D un punct oarecare pe latura $[AC]$ ($D \in [AC]$). Se notează cu E, respectiv F simetricul punctului D față de latura $[BC]$, respectiv $[AB]$.
a) Realizați desenul.
b) Arătați că $[BE] \equiv [BF]$.
c) Calculați măsura unghiului $\sphericalangle ABC$, știind că măsura unghiului $\sphericalangle EBF$ este de 120°.

TEZA 2

(0,8p) **1.** Calculați $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}$.

(0,8p) **2.** Scrieți multiplii numărului 7 cuprinși între 10 și 30.

(0,8p) **3.** Scrieți în ordine crescătoare numerele: 0,1(3); 0,13; 0,(13).

(0,8p) **4.** Aflați măsura suplementului unghiului cu măsura de 110°.

(0,8p) **5.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și $AB = 4$ cm, respectiv $BC = 5$ cm, aflați MN.

(0,8p) **6.** În jurul unui punct O s-au construit cinci unghiuri congruente. Determinați măsura fiecăruia dintre cele cinci unghiuri.

(0,7p) **7.** Scrieți numerele $x \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\frac{3x+1}{7}$ este subunitară.

(0,7p) **8.** Știind că $7ab - 7ac = 105$ și $a = 5$, calculați $b - c$.

(0,7p) **9.** Aflați numărul dreptelor determinate de cinci puncte diferite dintre care numai trei sunt coliniare.

(0,7p) **10.** a) Scrieți cel mai mic număr natural care împărțit la 7 dă câtul 5.
b) Scrieți cel mai mare număr natural care împărțit la 5 dă câtul 3.

(1,4p) **11.** Pe laturile $[Ox$, $[Oy$ ale unghiului ascuțit $\sphericalangle xOy$ se iau punctele A și B, respectiv C și D, astfel încât $[OA] \equiv [OC]$ și $[OB] \equiv [OD]$ și fie $\{M\} = AD \cap BC$. Demonstrați că:
a) $\sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle ODA$;
b) $\Delta AMB \equiv \Delta CMD$;
c) $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$.

TEZA 3

(0,8p) **1.** Calculați $3\frac{1}{7} : 2\frac{1}{5}$.

(0,8p) **2.** Aflați cel mai mic multiplu comun al numerelor 112 și 252.

(0,8p) **3.** Comparați numerele $\frac{5}{24}$ și $\frac{7}{36}$.

(0,8p) **4.** Calculați x astfel încât $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^8$ să fie pătratul numărului 3^x.

(0,8p) **5.** Determinați măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente complementare.

(0,8p) **6.** Un triunghi isoscel are o latură de 4 cm și alta de 6 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

(0,7p) **7.** Unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt suplementare și congruente. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle A$.

(0,7p) **8.** Media aritmetică a trei numere este 2,4. Ce număr trebuie adăugat celor trei numere pentru ca media lor aritmetică să devină 2,5?

(0,7p) **9.** Fie triunghiul ΔABC și ΔMNP astfel încât $[AB] \equiv [MN]$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ și $[BC] \equiv [NP]$. Dacă lungimea segmentului AC este de 4 cm, aflați lungimea segmentului MP.

(0,7p) **10.** Împărțind numărul x la numărul y, se obține câtul 3 și restul 7.
a) Calculați $2x - 6y + 3$. b) Arătați că $x + y > 35$.

(1,4p) **11.** Fie punctele C și D situate în același semiplan față de dreapta AB, astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$ și $[BC] \equiv [DA]$.
a) Realizați desenul.
b) Arătați că $[CA] \equiv [BD]$.
c) Arătați că $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$.

TEZA 4

(0,8p) **1.** Calculați $\frac{36}{26} \cdot \frac{13}{24}$.

(0,8p) **2.** Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor 112 și 252.

(0,8p) **3.** Calculați $(3^5 : 3^3 + 2^4 \cdot 2^2) : [(2^3)^2 + 3^3 : 3]$.

(0,8p) **4.** Rezolvați ecuația $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{6}$.

(0,8p) **5.** Dacă semidreptele [OA și [OB sunt semidrepte opuse, aflați măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.

(0,8p) **6.** Dacă $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt două unghiuri complementare și congruente, aflați măsura unghiului $\sphericalangle A$.

(0,7p) **7.** Suma a trei numere impare consecutive este 51. Găsiți numerele.

(0,7p) **8.** Scrieți elementele mulțimii: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 11 < x < 27 \text{ și } x \vdots 6\}$.

(0,7p) **9.** Punctele A, M, N și B sunt coliniare în această ordine, astfel încât M este mijlocul lui [AN] și N mijlocul lui [MB]. Dacă $|MB| = 8$ cm, atunci aflați lungimile segmentelor AM și AB.

(0,7p) **10.** Determinați numerele naturale a și b nenule, știind că cel mai mare divizor comun al lor este 7 și suma lor este 35.

(1,4p) **11.** Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COB$ și $\sphericalangle COA$ trei unghiuri în jurul unui punct O, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = x° + 20°$, $m(\sphericalangle COB) = 2x°$ și $m(\sphericalangle AOC) = 3x° - 20°$.

a) Calculați x.

b) Construiți unghiurile respectând măsurile din enunț.

c) Știind că [OD este semidreapta opusă semidreptei [OB, calculați măsura unghiului $\sphericalangle DOC$.

TEZA 5

(0,8p) **1.** Calculați $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot 10$.

(0,8p) **2.** Scrieți o pereche de numere raționale reprezentate prin fracții periodice simple care au câtul număr natural.

(0,8p) **3.** Dintre numerele $a = 2\,124$ și $b = 1\,029$, care este divizibil cu 9?

(0,8p) **4.** Aflați restul împărțirii numărului 34 la numărul 6.

(0,8p) **5.** Scrieți numărul 3 ca sumă a două numere raționale reprezentate prin fracții cu numitorul 7.

(0,8p) **6.** Fie AB și CD două drepte concurente în O. Dacă $m(\sphericalangle AOC) = 50°$, atunci aflați $m(\sphericalangle BOD)$.

(0,7p) **7.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$, specificați natura triunghiului ΔABC.

(0,7p) **8.** Scrieți divizorii numărului 12.

(0,7p) **9.** Din 15 kg de portocale se obțin 9 ℓ de suc. Câți litri se obțin din 20 kg de portocale?

(0,7p) **10.** Raportul măsurilor a două dintre unghiurile formate de două drepte concurente este egal cu $\frac{2}{3}$. Aflați măsurile celor două unghiuri.

(1,4p) **11.** Fie triunghiul ΔABC și M mijlocul laturii [BC]. Pe semidreapta [AM se consideră punctul N, astfel încât M să fie mijlocul segmentului [AN]. Demonstrați că:

a) $[AB] \equiv [NC]$; b) $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CNM$; c) $[AC] \equiv [BN]$.

TEZA 6

(0,8p) **1.** Calculați $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$.

(0,8p) **2.** Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x - 1 \le 3\}$. Specificați cel mai mare număr din mulțime.

(0,8p) **3.** Aflați suma divizorilor naturali ai numărului 10.

(0,8p) **4.** Scrieți multiplii numărului 18 mai mici decât 100.

(0,8p) **5.** Se consideră 9 unghiuri congruente formate în jurul unui punct. Determinați măsura fiecărui unghi.

(0,8p) **6.** Suma a cinci numere naturale nenule pare și distincte este 40. Determinați numerele.

(0,7p) **7.** Scrieți cubul numărului 1,(3).

(0,7p) **8.** Calculați măsura unui unghi, știind că suma dintre complementul și suplementul lui este egală cu 120°.

(0,7p) **9.** Știind că M, N, P și Q sunt coliniare în această ordine și $[MN] \equiv [NP] \equiv [PQ]$, arătați că [MQ] și [NP] au același mijloc.

(0,7p) **10.** Scrieți sub formă de puteri care au aceeași bază $[0,(1)]^5$ și $\left(\frac{1}{27}\right)^8$.

(1,4p) **11.** Fie două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COB$, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 100°$, $m(\sphericalangle COB) = 64°$ și [OM, respectiv [ON sunt bisectoarele celor două unghiuri $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle COB$.

a) Realizați desenul.

b) Calculați măsura unghiului $\sphericalangle MON$.

c) Știind că [OD este semidreapta opusă semidreptei [OC, calculați măsura unghiului $\sphericalangle AOD$.

TEZA 7

(0,8p) **1.** Calculați $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{11}{21}$.

(0,8p) **2.** Determinați numerele de forma $\overline{x0x}$ divizibile cu 2.

(0,8p) **3.** Comparați numerele $a = 3{,}4$ și $b = 3\frac{3}{5}$.

(0,8p) **4.** Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor 12 și 18.

(0,8p) **5.** Determinați complementul unghiului cu măsura de 70°.

(0,8p) **6.** Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf.

(0,7p) **7.** Scrieţi ca puteri cu acelaşi exponent numerele $\left(\frac{1}{3}\right)^{39}$ şi $\left(\frac{1}{4}\right)^{26}$.

(0,7p) **8.** Calculaţi cel mai mare divizor comun al numerelor 360 şi 108.

(0,7p) **9.** Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COB$ adiacente complementare. Ştiind că m($\sphericalangle AOB$) = = 36° şi că semidreapta [OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COB$, aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle AOM$.

(0,7p) **10.** Se dau punctele coliniare A, B şi C astfel încât $B \in (AC)$. Ştiind că $AB = 2$ cm, $AC = 5$ cm şi că M este mijlocul segmentului [BC], aflaţi lungimea segmentului [AM].

(1,4p) **11.** Preţul unei cărţi este de 50 de lei. Volumul se ieftineşte cu 10% şi după un timp se scumpeşte cu 10%.

a) Care este preţul după ieftinire?

b) Care este preţul după scumpire?

c) Cu ce procent din preţul iniţial trebuie să se ieftinească volumul, ca preţul lui să fie 49,5 lei?

TEZA 8

(0,8p) **1.** Aflaţi numărul cu $2\frac{1}{3}$ mai mic decât numărul $3\frac{3}{4}$.

(0,8p) **2.** Calculaţi $\frac{1}{3} : 2^2 + \frac{1}{6}$.

(0,8p) **3.** Determinaţi $\frac{2}{3}$ din 27.

(0,8p) **4.** Dacă $2a + b = 7$, aflaţi $4a + 1 + 2b$.

(0,8p) **5.** Scrieţi numerele de forma $\overline{4x}$ divizibile cu 3.

(0,8p) **6.** Complementul unui unghi este de trei ori mai mare decât unghiul. Calculaţi măsura unghiului.

(0,7p) **7.** Se consideră semidreptele [OA, [OB şi [OC astfel încât m($\sphericalangle AOB$) = 75°. Ştiind că m($\sphericalangle COB$) = 27°, aflaţi m($\sphericalangle AOC$).

(0,7p) **8.** Determinaţi numărul raţional a pentru care ecuaţia $2x + 3 = a$ are ca soluţie pe 1,5.

(0,7p) **9.** Fie un unghi $\sphericalangle AOB$ şi M un punct oarecare pe bisectoarea acestuia. Ştiind că distanţa de la M la latura [OA este de 4 cm, aflaţi distanţa de la M la latura [OB.

(0,7p) **10.** Se consideră dreptele AB şi CD concurente în O. Ştiind că măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ cu semidreapta [OB este de 125°, aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle BOD$.

(1,4p) **11.** Un test are 20 de probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 5 puncte şi pentru fiecare problemă rezolvată greşit se scad 2 puncte.

a) La acest test Alexandra a obţinut 65 de puncte. Câte probleme a rezolvat corect Alexandra?

b) Dacă Mihai a rezolvat corect 18 probleme, ce punctaj a obţinut?

c) Care este numărul minim de probleme care trebuie rezolvat de un elev pentru a fi sigur că a obţinut cel puţin 50 de puncte?

TEZA 9

(0,8p) **1.** Calculaţi $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 3$.

(0,8p) **2.** Rezolvaţi ecuaţia $3x + 2 = 8$.

(0,8p) **3.** Aflaţi numărul de divizori naturali ai lui 12.

(0,8p) **4.** Scrieţi numerele de forma $\overline{1xy}$ divizibile cu 15.

(0,8p) **5.** Calculaţi $17 + 2 \cdot [15 - 3 \cdot (10 - 2 \cdot 3)]$.

(0,8p) **6.** Ştiind că $\Delta ABC \equiv \Delta BCA \equiv \Delta CAB$, aflaţi natura triunghiului ΔABC.

(0,7p) **7.** Calculaţi distanţa minimă care se poate măsura simultan cu unităţi de măsură de 12 m şi 18 m.

(0,7p) **8.** Calculaţi diferenţa numerelor $a = 2 + \frac{3}{5}$ şi $b = (2^2)^3 : 2^6 + 1$.

(0,7p) **9.** Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente este de 67°30'. Aflaţi suma măsurilor celor două unghiuri.

(0,7p) **10.** Perimetrul unui triunghi este de 51 cm. Ştiind că lungimile laturilor triunghiului sunt exprimate prin numere naturale impare consecutive, determinaţi lungimile acestora.

(1,4p) **11.** Fie triunghiul isoscel ΔABC cu $[AB] \equiv [AC]$. Perpendiculara din A pe perpendiculara în B pe [BC] o intersectează pe aceasta în E, iar perpendiculara din A pe perpendiculara în C pe [BC] o intersectează pe aceasta în F.

a) Realizaţi desenul.

b) Demonstraţi că $[AE] \equiv [AF]$.

c) Demonstraţi că $[CE] \equiv [BF]$.

TEZA 10

(0,8p) **1.** Calculaţi $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$.

(0,8p) **2.** Rezolvaţi ecuaţia $\frac{3}{5} + 2x = \frac{8}{5}$.

(0,8p) **3.** Calculaţi cel mai mic multiplu comun al numerelor 360 şi 108.

(0,8p) **4.** Aflaţi numărul cu $2\frac{1}{3}$ mai mare decât $1\frac{1}{4}$.

(0,8p) **5.** Găsiţi cel mai mare număr natural de forma $\overline{13x}$, scris în baza zece, divizibil cu 6.

(0,8p) **6.** Fie punctele A, B şi C coliniare în această ordine şi M, respectiv N, mijloacele segmentelor [AB], respectiv [BC]. Ştiind că lungimea segmentului MN este de 3 cm, aflaţi lungimea segmentului [AC].

(0,7p) **7.** Calculaţi $4,8 - 0,48 + 48$.

(0,7p) 8. Determinați măsura a două unghiuri opuse la vârf și complementare.

(0,7p) 9. Despre triunghiurile ABC și MNP se știe că $[AB] \equiv [MN]$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle M)$ și $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle P)$. Știind că $BC = 5$ cm, aflați lungimea segmentului NP.

(0,7p) 10. Determinați cel mai mic număr natural care, împărțit pe rând la 5, 6 și 8, dă resturile 3, 4 și, respectiv, 6.

(1,4p) 11. Fie semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$ și $[OD$ astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 70°$, $m(\sphericalangle COB) = 80°$ și $m(\sphericalangle COD) = 90°$.

a) Realizați figura.

b) Calculați măsura unghiului $\sphericalangle AOD$.

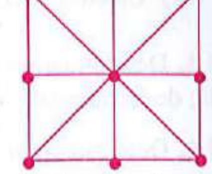
c) Știind că $[OE$ este semidreapta opusă semidreptei $[OB$, calculați măsura unghiului $\sphericalangle AOE$.

Probleme pentru pregătirea olimpiadei și a concursurilor școlare

1. Aflați numerele naturale prime a, b, c cu proprietatea $287a + 82b + 14c = 2009$.

2. Arătați că rezultatul calculului $\dfrac{1,4 + 2,4 + 3,4 + ... + \overline{n,4}}{n} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{n}{2}$ este număr natural, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se consideră cele nouă puncte obținute prin intersecția dreptelor din figura alăturată. Explicați cum putem desena, fără a ridica creionul de pe hârtie, o linie frântă formată din patru segmente care să conțină toate cele nouă puncte (punctele menționate nu sunt în mod obligatoriu capete ale segmentelor).



4. a) Desenați $\sphericalangle AOB$ cu măsura de 23° și apoi $\sphericalangle COB$ cu măsura de cinci ori mai mare decât măsura $\sphericalangle AOB$.

b) Pornind de la figura realizată la punctul a), desenați un unghi cu măsura de 16°15', folosind numai rigla negradată și compasul (precizați fiecare pas făcut în realizarea desenului).

5. Se consideră un număr prim $p > 3$.

a) Demonstrați că restul împărțirii lui p la 4 este 1 sau 3.

b) Demonstrați că numărul $(p - 1)(p + 1)$ este divizibil cu 24.

(*Gazeta Matematică*, nr. 10/2008)

6. Se consideră un triunghi ΔABC și punctul E mijlocul segmentului $[BC]$, iar D, respectiv F sunt mijloacele segmentelor $[BE]$, respectiv $[EC]$. Pe semidreapta $(AE$ se consideră punctul M astfel încât $[AE] \equiv [EM]$.

a) Arătați că $[AF] \equiv [DM]$.

b) Arătați că $\sphericalangle CAF \equiv \sphericalangle BMD$.

7. Se consideră mulțimea $M = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}^*, a \le 10, b \le 10, c \le 10\}$.

a) În câte zerouri se termină produsul numerelor din mulțimea M?

b) Demonstrați că orice submulțime A a lui M, cu 9 elemente, conține cel puțin două elemente distincte al căror produs este pătrat perfect.

8. Se consideră în plan 10 puncte diferite.

a) Care este numărul maxim de drepte distincte determinate de cele 10 puncte? Justificați răspunsul dat.

b) Există o poziție a punctelor în plan astfel încât numărul de drepte distincte determinat de cele 10 puncte să fie egal cu 44? Justificați răspunsul dat.

9. Se consideră egalitățile $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b^2 + 4}{b + 1}$ și $\dfrac{a}{8} = \dfrac{c}{14}$, unde a, b și c sunt numere naturale.

a) Arătați că 4 divide a.

b) Găsiți toate tripletele (a, b, c) care verifică simultan relațiile din enunț.

prof. Cerasela Bociu

10. Fie numerele naturale nenule a, b astfel încât $7 \cdot [a, b] = 3a^2 + b^2$, unde $[a, b]$ este c.m.m.m.c. al numerelor a și b. Determinați numerele naturale a, b.

prof. Cerasela Bociu

11. Fie $(OC$ și $(OD$ două semidrepte situate în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ astfel încât $(OD \subset \text{int}(\sphericalangle AOC)$. Aflați măsurile unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle COB$, știind că $m(\sphericalangle AOD) = 60°$ și $m(\sphericalangle BOD) = 50°$.

12. Triunghiul ΔABC are $AB = AC = 3$ cm și $BC = 5$ cm. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează (AC) în punctul D. Perpendiculara din punctul C pe dreapta BD intersectează dreapta AB în M.

a) Construiți triunghiul ΔABC cu dimensiunile din enunț.

b) Demonstrați că triunghiul ΔDMC este isoscel.

c) Calculați perimetrul triunghiului ΔADM.

Selectată de prof. Cerasela Bociu

13. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit, pe rând, la numerele 24; 40 și 56 dă, de fiecare dată, restul 5 și câtul diferit de 0.

14. Determinați ultimele 3 zecimale nenule ale numărului rațional $\frac{2007}{2^{2008}}$.

prof. Irinel Pancu

15. Fie $B \in (AC)$ și D, E două puncte de o parte și de alta a dreptei AC, astfel încât triunghiurile ΔABD și ΔBCE să fie echilaterale. Considerăm $S \in (AB)$, $T \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle DSB) = m(\sphericalangle ETC) = 90°$ și $DS \cap EC = \{P\}$, $ET \cap AD = \{F\}$. Dacă P, B, F sunt coliniare și D, B, E sunt coliniare, arătați că $AD = BC$.

prof. Nicolae Stănică

16. Aflați măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente, știind că raportul dintre suplementul sumei lor și suma suplementelor lor este $\frac{1}{4}$.

prof. Ștefan Iloaie, Gazeta Matematică, nr. 7/2006

17. a) Arătați că, pentru $n \in \mathbb{N}$, numărul $A = 72^{n+1} + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+2} + 3^{2n} \cdot 2^{3n} \cdot 6$ este divizibil cu 15.

prof. Maria Matei, Grup Școlar Huedin

b) Știind că $\frac{a}{a+2} = \frac{b}{b+5} = \frac{c}{c+7}$ și $\frac{2}{a} + \frac{5}{b} + \frac{7}{c} = 81$, calculați $(a + b + c) : \frac{14}{27}$.

prof. Simona Pop, Col. „A. Maior", Cluj-Napoca,
prof. Vasile Șerdean, Școala nr. 1, Gherla

c) Într-o fabrică lucrează 1093 de persoane, repartizate la mai multe puncte de lucru. La primul punct de lucru lucrează o persoană, iar la fiecare din următoarele puncte lucrează un număr de persoane egal cu triplul numărului de persoane aflat la punctul de lucru anterior. Aflați câte puncte de lucru există în acea fabrică.

prof. Grigore Tarța, Lic. T. „Ana Ipătescu", Gherla

18. Se dau numerele: $x = \frac{a + 8^{1004}}{a + (3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^6 \cdot \ldots \cdot 3^{63}) : 9}$, $a \in \mathbb{N}$, și $y = \frac{10^{150}}{2 \cdot (3 + 3^2 + \ldots + 3^{299})}$.

a) Arătați că $x < 1$. b) Comparați numerele x și y.

prof. Violin Gorcea, Lic. T. „Avram Iancu", Cluj-Napoca

19. Dreptele AB și CD sunt concurente în O. Știind că semidreptele $[OM$, $[OT$, $[OR$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle DOM$ și, respectiv, $\sphericalangle COB$, iar $m(\sphericalangle AOM) = 130°$, calculați:

a) $m(\sphericalangle ROM)$; b) $m(\sphericalangle AOD)$;

c) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOR$.

prof. Vasile Șerdean, Școala nr. 1, Gherla

20. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2006}$, 2006 și 2008 este 2007. Calculați media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2006}$.

Selectată de Ioan Mastan

21. Arătați că diferența dintre un număr natural de 3 cifre diferite și „răsturnatul" său nu poate fi pătrat perfect.

Mircea Lascu

22. Se consideră numerele: $a = 2^{n+12} : \left(2^3\right)^4 + 3^{2n} : 9^n$; $n \in \mathbb{N}^*$;

$b = \frac{49 \cdot 14^n + 22^n \cdot 11}{11^{n+1} + 7^{n+2}}$; $n \in \mathbb{N}^*$; $c = 2^{n+3} - 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n - 2^0$; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați numerele a, b și c.

b) Ce fel de fracție zecimală este numărul $\frac{1}{a \cdot b} + \frac{2}{b \cdot c} - \frac{3}{a \cdot c}$: finită, periodică simplă sau periodică mixtă?

Selectată de Radu Floare

23. Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C în această ordine, cu $BC > AB$. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$, N mijlocul segmentului $[BC]$ și P mijlocul segmentului $[AC]$. Arătați că $2(MN + PN) = AB + AC$.

Selectată de Florica Mureșan

24. Efectuați calculul: $\frac{1}{2008} - \frac{1}{2008 \cdot 2009}$.

25. Aflați valoarea produsului: $\left(1 - \frac{1}{2007}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2008}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2009}\right)$.

26. Arătați că rezultatul calculelor următoare este un număr natural:

$$\left[\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{18}\right) : \frac{1}{45} + \frac{1}{60} : \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15}\right)\right] : 1\frac{1}{2}.$$

27. Demonstrați că numărul $7^{2009} - 7^{2008} - 7^{2007}$ este divizibil cu 2009.

Indicații și răspunsuri

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

1. Exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

A. 1. a) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Din $3x + 2 \le 14 \Rightarrow 3x \le 12 \Rightarrow x \le 4 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow C = \{0, 1, 2, 3, 4\} = A$. Cum orice element al mulțimii A este element al mulțimii $B \Rightarrow A \subset B$; b) $B \cup C = B$, $B \cap C = C$, $B - C = \{5, 6, 8, 9\}$. **2.** 500. **3.** 6,125; 1,(2); 1,2(3). **4.** $\frac{31}{25} = 1\frac{6}{25}$; $\frac{24}{11} = 2\frac{2}{11}$; $\frac{32}{15} = 2\frac{2}{5}$. **5.** 103. **6.** $x = 14$. **7.** $x = 14$. **8.** 2,68. **9.** 110,25 ℓ.

B. 1. a) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2\}$; $A \cup B = A$; $A \cap B = B$; $A - B = \{3\}$; $B - A = \varnothing$. **2.** 32. **3.** $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. **4.** 42 de fete și 84 de băieți. **5.** 26 de pagini, adică 25 de pagini cu câte 25 de timbre și o pagină pe care vor fi 7 timbre. **6.** 1253. **7.** 0,8 și 11,32. **8.** 53 ℓ. **9.** 1000 dinari.

2. Modele de teste pentru evaluarea inițială

Testul 1: 1. B. **2.** D. **3.** A. **4.** B. **5.** C. **6.** B. **7.** B. **8.** B. **9.** C. **10.** 11. **11.** 10. **12.** 50 pagini. **13.** 1000 m. **14.** $4a - 8b - 1 = 27$.

Testul 2: 1. C. **2.** C. **3.** C. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** A. **8.** B. **9.** A. **10.** $A = \{1, 3, 5, 15\}$. **11.** 60 lei. **12.** 3. **13.** 98. **14.** 710, 765.

Testul 3: 1. B. **2.** D. **3.** A. **4.** B. **5.** C. **6.** B. **7.** B. **8.** B. **9.** B. **10.** a) 190 lei; b) 100 kg. **11.** a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = p$, de unde $x = 2p$, $y = 3p$, $z = 5p$; b) 40 lei, 60 lei, 100 lei. **12.** 2027,6.

Testul 4: 1. C. **2.** C. **3.** C. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** A. **8.** B. **9.** C. **10.** a) $5 \cdot 130 = 650$ lei; b) 160 kg. **11.** a) 24 lei, 36 lei, 60 lei; b) 13 lei. **12.** 45,625.

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE (I)

1. Operații cu numere naturale. Reguli de calcul cu puteri

1. 203, 230, 302, 320. **2.** $0 + 11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 6 + 5 = 7 + 4 = 8 + 3 = 9 + 2 = 10 + 1 = 11 + 0$, adică perechile (0, 11), (11, 0), (1, 10), (10, 1), (2, 9), (9, 2), (3, 8), (8, 3), (4, 7), (7, 4), (5, 6), (6, 5). **3.** (1, 12), (12, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3). **4.** a) 2; b) 2029; c) 18; d) 54. **5.** a) 2^8; b) 3^{11}; c) 5^6; d) 7^{2x+1}. **6.** a) 2^2; b) 3^2; c) 5; d) 7. **7.** a) $x = 2$; b) $x = 6$; c) $x = 9$. **8.** a) $q = 0$, $r = 24$; b) $q = 154$, $r = 11$; c) $q = 28$, $r = 104$. **9.** $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **10.** Nu! $r = 7$ și $7 > 4$ sau $7 > 5$. **11.** a) $2^{602} > 2^{60}$; b) $3^{17} > 3^{16} = 9^8$; c) $25^{11} = (5^2)^{11} = 5^{22} < 5^{23}$. **12.** a) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $n \in \{5, 6\}$; d) $n = 3$. **13.** a) 2^6; b) 3^6; c) 19^{200}; d) 5^{72}. **14.** a) $27 \cdot 100 = 2700$; b) $57 \cdot 1000 = 57\,000$; c) $= 2 \cdot 2016 = 4032$; d) $1957 \cdot 102 = 19\,570$. **15.** a) $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25 > 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$; b) $(11 - 7)^2 = 4^2 = 16 < 72 = 121 - 49 = 11^2 - 7^2$. **16.** a) 9959; b) 9979. **17.** a) $x \in \{0, 1, 2\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 8, 9\}$; d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **18.** a) 420; b) 600; c) 2400; d) 700. **19.** a) 45; b) 40; c) 4; d) 77. **20.** a) 9986; b) 9947. **21.** a) 24; b) 4; c) 4; d) 4; e) 11; f) 37. **22.** a) $16^{17} = 2^{68} < 2^{102} = (2^3)^{34} = 8^{34}$; b) $27^{25} = 3^{75} = 3^{75}$; c) $10^{1000} > 10^{200} = 100^{100}$. **23.** a) $x \in \{40, 41, \ldots\}$; b) $x \in \{0, \ldots, 7\}$; c) $x \in \{4, 5, 6, \ldots\}$; d) $x \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. **24.** a) 0; b) 0; c) 2; d) 9. **25.** a) $27^{11} < 3^{35} < 9^{18}$; b) $4^{29} < 8^{20} < 2^{61}$. **26.** a) 5050; b) 2500; c) 2550; d) 1050; e) 2520; f) 22 055. **27.** a) 24; b) 177; c) $16 \cdot 7^4$; d) 189. **28.** a) 0; b) 1008. **29.** a) $27^2 = 9^3$; b) $3 \cdot 5^{28}$ – Nu; c) $2 \cdot 3^{30}$ – Nu. **30.** a) $u(19^{17} + 46^{17}) = 7$; b) $u(34^{19} + 29^{17}) = 3$; c) $u(54^{11} - 39^{10}) = 3$. **31.** 77. **32.** 14. **33.** $a = 5$, $b = 7$, $c = 9$. **34.** a) $a \to 4$ zerouri, $b \to 6$ zerouri; b) 13 zerouri; c) 1. **35.** a) 8; b) 100. **36.** $(3^2)^3 < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 33^3 < 3^{33}$. **37.** a) $x = (27)^{180} \cdot 5 > (25)^{180} \cdot 5 = y$; b) $x = 5 \cdot 2^{2011} < 5 \cdot 3^{2011} = y$. **38.** a) $x = 501$; b) $x = 39$. **39.** a) 2011; b) $2011^{2011} = 2011^{2010} \cdot 2011 = (2011^{1005})^2 \cdot (1^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2) = (2011^{1005})^2 + (5 \cdot 2011^{1005})^2 + (10 \cdot 2011^{1005})^2 + (27 \cdot 2011^{1005})^2 + (34 \cdot 2011^{1005})^2$. **40.** Suma cifrelor numărului $10^{20} + 3 \cdot 10^{10} - 1$ este multiplu de 3, dar nu este multiplu de 9. **42.** a) $10^{24} = 125^8 < 128 < (2^7)^8 < 2^{80}$. Pe de altă parte $2^{80} < 2^{24} \cdot 2 \cdot 5^{25} = 10^{25}$; b) Cum $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$, urmează că 2^{80} are 25 de cifre. Dar $a = 2^{320} \cdot 5^{240} = 10^{240} \cdot 2^{80}$. Imediat, numărul a are $240 + 25 = 265$ cifre. **43.** 0.

Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare

1. Din $7x + 5y = 2(z + u)$ imediat x și y au aceeași paritate, deci $S = x + y$ este număr par. Atunci $2A = (11x + 9y)(2(z + u) - 2x) = (11x + 9y)(5x + 5y) = 5(x + y)(11x + 9y)$. Rezultă că ultima cifră a lui A este 0. **2.** $\overline{ab} = 24$. **3.** Nu există $a, b \in \mathbb{N}$, cu condiția dată. **4.** Avem $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2800 = 28 \cdot 10^2$. Urmează că avem 503 secvențe de acest tip. Calculând $S = 7 + 7^2 + \ldots + 7^{2012}$, numărul S are ca ultime două cifre 0. Urmează că ultimele două cifre vor fi date de ultimele cifre ale lui $7^{2013} + 7^{2014}$, care sunt 7, respectiv 9. Rezultă imediat că ultimele două cifre ale numărului nostru vor fi 16. **5.** 62. **6.** 171. **7.** $\overline{ab} \in \{96, 85, 74, 63, 52, 41\}$. **8.** 107. **9.** $B = 1^2 + 2^2 + \ldots + 2001^2 + 2001 \cdot 2002$. Atunci $A - B = 2002^2 - 2001 \cdot 2002 = 2002$. **10.** a) Calcul; b) $x = 35^n \cdot 74$. Cum $n = 2k + 1$, obținem $x = 35^{2k} \cdot 35 \cdot 74 = (35^k)^2 \cdot 2590 = (35^k)^2(45^2 + 23^2 + 6^2) = (45 \cdot 35^k)^2 + (23 \cdot 35^k)^2 + (6 \cdot 35^k)^2$.

2. Divizor, multiplu

1. A; F; A; F. **2.** a) divide; divizor; multiplu; b) divizibil; multiplu; divizor; c) divide; divizor; multiplu. **3.** $\not\vdots$; $\vdots$; $\not\vdots$; $\vdots$. **4.** A; A; F; F. **5.** a) 1, 7, 7^2; b) 1, 5, 5^2, 5^3. **6.** 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63. **7.** a) $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$; b) $M_5 = \{0, 5, 10, 15, \ldots, 5k, \ldots\}$, $k \in \mathbb{N}$; c) $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$; d) $M_{12} = \{0, 12, 24, \ldots, 12k, \ldots\}$; e) $D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$; f) $M_{18} = \{0, 18, 36, 54, \ldots, 18k, \ldots\}$. **8.** p_1: A; p_2: A; p_3: F; p_4: F; p_5: A; p_6: A; p_7: F; p_8: A. **9.** a) (1, 18); (2, 9); (3, 6); (6, 3); (9, 2); (18, 1); b) 4; $D_4 = \{1, 2, 4\}$; 9; $D_9 = \{1, 3, 9\}$; 25; $D_{25} = \{1, 5, 25\}$. **10.** a) improprii: 1, 17; proprii: nu are; b) improprii: 1, 32; proprii: 2, 4, 8, 16; c) improprii: 1, 9; proprii: 3. **11.** a) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$; c) 24. **12.** a) $\{1, 2, 7, 14\}$; b) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$; d) $\{1, 2\}$; e) $\{1, 2\}$; f) $\{1, 2, 3, 6\}$; g) $\{1, 2\}$. **13.** $M = \{0, 6, 12, 18, 24\}$; a) $M \cap D_{12} = \{6, 12\}$; b) $M \cup D_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 24\}$; c) $M - D_{12} = \{0, 18, 24\}$; d) $D_{12} - M = \{1, 2, 3, 4\}$. **14.** $A = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$; $B = \{0, 12, 24\}$; $A \cup B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$; $A \cap B = \{0, 12, 24\}$; $A - B = \{6, 18, 30\}$; $B - A = \varnothing$. **15.** a) $A = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$; $B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$; b) $A \cup B = \{0, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30\}$; $A \cap B = \{0, 12, 24\}$; $A - B = \{6, 18, 30\}$; $B - A = \{4, 8, 16, 20, 28\}$. **16.** $M = \{0, 12, 24, 36, 48\}$; $N = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$; $P = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48\}$; $Q = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$. F; F; F; F; F; A; A; A. **17.** $a = 12c + 8 = 4 \cdot (3c + 2) \vdots 4$. **18.** a) $x \in \{0, 2, 4, 14\}$; b) $x \in \{0, 1\}$; c) $x \in \{1, 5, 19\}$. **19.** Din $x - 6$ este multiplu de 7, rezultă $\frac{x-6}{7} = k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x - 6 = 7k \Rightarrow x = 7k + 6$, $6 < 7 \Rightarrow r = 6$. **20.** 270. **21.** 322. **23.** 12. **24.** a) $M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$; b) $M_{126} = \{504, 630, 756, 882\}$. **25.** 423 și 470. **27.** $(x, y) \in \{(2, 5); (3, 2); (4, 1); (7, 0)\}$. **29.** $(x, y) \in \{(0, 9); (1, 4)\}$. **30.** a) $27 \cdot 15^n \vdots 27$; b) $2^3 \cdot 12^n \cdot 63 \vdots 63$. **32.** 150, 156, 162. **34.** Din $x \in \mathbb{N}$ și $x \vdots 3$ rezultă $\frac{x}{3} = m$ și $m \in \mathbb{N}$, deci $x = 3m$, $m \in \mathbb{N}$. Analog, deoarece $x \vdots 5 \Rightarrow x = 5n$, $n \in \mathbb{N}$. Din $3m = 5n \Rightarrow m = \frac{5n}{3} \in \mathbb{N}$, deci

$n = 3k, k \in \mathbb{N}$. Înseamnă că $x = 5 \cdot 3k = 15k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x}{15} = k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow x \vdots 15$; b) Analog problemei 33 b). **35.** a) $46^{48} - 25^{24} = (41 + 5)^{48} - 25^{24} = M_{41} + 5^{48} - 25^{24} = M_{41} + 5^{48} - 5^{48} = M_{41}$; b) $2016^{2013} - 5^{2013} = (2011 + 5)^{2013} - 5^{2013} = M_{2011} + 5^{2013} - 5^{2013} = M_{2011}$.

3. Criterii de divizibilitate

1. a) 2, 4, 6; b) 3, 6, 9; c) 4, 8, 12; d) 5, 10, 15; e) 9, 18, 27; f) 10, 20, 30. **2.** a) 998; b) 999; c) 996; d) 995; e) 999; f) 990. **3.** a) 100; b) 102; c) 100; d) 100; e) 108; f) 100. **4.** A, F, F, F, A, A, A, A, A, A, F, A. **5.** a) 328, 330, 332, 334, 336, 338, 340, 342, 344, 346, 348, 350, 352, 354, 356, 358, 360, 362, 364, 366, 368, 370, 372, 374; b) 330, 333, 336, 339, 342, 345, 348, 351, 354, 357, 360, 363, 366, 369, 372; c) 328, 332, 336, 340, 344, 348, 352, 356, 360, 364, 368, 372; d) 330, 335, 340, 350, 355, 360, 365, 370; e) 333, 342, 351, 360, 369; f) 330, 340, 350, 360, 370 . **7.** a) 530, 532, 534, 536, 538; b) 2142, 4144, 6146, 8148; c) 300, 322, 344, 366, 388; d) 222, 444, 666, 888; e) 2052, 2054, 2056, 2058, 2150, 2152, 2154, 2156, 2158, 2250, 2254, 2256, 2258, 2350, 2352, 2354, 2356, 2358, 2450, 2452, 2456, 2458, 2550, 2552, 2554, 2556, 2558, 2650, 2654, 2658, 2750, 2752, 2754, 2756, 2758, 2850, 2852, 2854, 2856, 2950, 2952, 2954, 2956, 2958. **8.** a) 531, 534, 537; b) 2142, 5145, 8148; c) 300, 333, 366, 399; d) 111, 333, 666, 999; e) 2250, 2550, 2850, 2151, 2451, 2751, 2052, 2352, 2652, 2952, 2253, 2553, 2853, 2154, 2454, 2754, 2055, 2355, 2655, 2995, 2358, 2658, 2358, 2259, 2559, 2859. **9.** a) 532, 536; b) 4144, 8148; c) 344, 388; d) 444, 888; e) 2052, 2152, 2352, 2452, 2552, 2652, 2752, 2852, 2952, 2056, 2156, 2256, 2356, 2456, 2556, 2756, 2856, 2956. **10.** a) 530, 535; b) 5145; c) 300, 355; d) 555; e) 2150, 2250, 2350, 2450, 2550, 2650, 2750, 2850, 2950, 2055, 2155, 2255, 2355, 2455, 2655, 2755, 2855, 2955. **11.** a) 531; b) 2142; c) 333; d) 999; e) 2250, 2952, 2853, 2754, 2655, 2556, 2457, 2358, 2259. **12.** a) 700, 710, 720, 730, 740, 750, 760, 770, 780, 790; b) 170, 270, 370, 470, 570, 670, 770, 870, 970; c) 2050; d) 7120, 7220, 7320, 7420, 7520, 7620, 7720, 7820, 7920. **13.** 0, 2, 4. **14.** a) {12, 372, 108324, 10620}; b) {12; 372; 4509; 108324; 10620}; c) {12; 372; 108324; 10620}; d) {25}; e) {4509, 10620, 108324}; f) {10620}. **15.** a) 102 030, 122 232, 142 434, 162 434, 162 636, 182 838; b) 102 030, 152 535; c) 102 030, 112 131, 122 232, ..., 192 939; d) 122 232, 162 636; e) 112 131, 142 434, 162 636; f) 102 030. **16.** $A = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, $B = \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$ și $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A - B = \{60, 70, 80, 90\}$, $B - A = \varnothing$. **17.** $A = \{3, 4, 6, 12\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, $C = \{3, 6, 12, 15, 21, 24, 30\}$, $D = \{4, 6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 30\}$, $E = \varnothing$, $F = \{6, 12, 18, 24, 30\}$. **18.** a) 108, 114, 120; b) 105, 120, 135; c) 108, 144, 180; d) 120, 150, 180. **19.** a) 5; b) 3; c) 1. **20.** a) multiplii de 4; b) multiplii de 25; c) 5. **21.** a) $10^n + 107 = (9 + 1)^n + 107 = M_9 + 1 + 107 = M_9 + 108 = M_9 + 9 \cdot 12 = M_9$; b) $2 \cdot 10^n + 70 = 2(9 + 1)^n + 70 = M_9 + 2 + 70 = M_9 + 72 = M_9 + 1 + M_9 + 2 + 6 = M_9$. **22.** a) $n = 4k$, $u(a) = 6 + 1 + 6 + 5 = 8 \nmid 10$; $n = 4k + 1$, $u(a) = 2 + 3 + 4 + 5 = 4 \nmid 10$; $n = 4k + 2$, $u(a) = 4 + 9 + 6 + 5 = 4 \nmid 10$; $n = 4k + 3$, $u(a) = 8 + 7 + 4 + 5 = 4 \nmid 10$. Evident că răspunsul este: nu există $n \in \mathbb{N}$, n de două cifre pentru care a să fie divizibil cu 10; b) $n = 4k$, $u(b) = 1 + 6 + 5 + 6 = 8 \nmid 10$; $n = 4k + 1$, $u(b) = 3 + 4 + 5 + 8 = 0 \vdots 10$; $n = 4k + 2$, $u(b) = 9 + 6 + 5 + 4 = 4 \nmid 10$; $n = 4k + 3$, $u(b) = 7 + 8 + 5 + 6 = 6 \nmid 10$. În acest caz, pentru $n = 4k + 1$, numărul b este divizibil cu 10. Cum n este de două cifre, avem că $n \in \{13, 17, 21, 25, ..., 93, 97\}$. **23.** $n \in \{2, 6\}$. **24.** $a = 30^n(1 + 14 + 2) = 17 \cdot 30^n \vdots 17$. **25.** $a = 6^n(3 + 8 + 7) = 18 \cdot 6^n \vdots 18$. **26.** a) $u(3^{80}) = 1$; $u(2^{20}) = 6 \Rightarrow u(3^{80} - 2^{20}) = 5 \Rightarrow 5 \mid (3^{80} - 2^{20})$; b) $u(9^{4n}) = 1$; $u(7^{4n}) = 1 \Rightarrow u(9^{4n} - 7^{4n}) = 0 \Rightarrow 10 \mid (9^{4n} - 7^{4n})$. **27.** Fie $a(a + 1)$ produsul a două numere consecutive. a) Dacă a este par $\Rightarrow a = 2k, k \in \mathbb{N}$ și $a(a + 1) = 2k(2k + 1) \vdots 2$ și dacă a este impar $\Rightarrow a = 2p + 1, p \in \mathbb{N} \Rightarrow a(a + 1) = (2p + 1)(2p + 2) = 2 \cdot (2p + 1) \cdot (p + 1) \vdots 2$. Deci, oricare ar fi $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot (a + 1)$ este număr par. **29.** a) $\overline{abcd} = 1000a + 100b + \overline{cd} = 25 \cdot (40a + 4b) + M_{25} = M_{25}$; b) $\overline{abcd} = 25(40a + 4b) + \overline{cd} = 25 \cdot k + \overline{cd}$, unde $k = 40a + 4b$. Rezultă că $\overline{cd} = \overline{abcd} - 25k$. Cum $\overline{abcd} = M_{25}$, din ipoteză, rezultă că $\overline{cd} = M_{25}$. **30.** ($\Rightarrow$) Dacă $c = 0$, $d = 0$, imediat $\overline{abcd} = M_{100}$. ($\Leftarrow$) Dacă $\overline{abcd} = M_{100}$, avem $\overline{abcd} = 1000a + 100b + \overline{cd} = 100(10a + b) + \overline{cd} = M_{100} + \overline{cd}$. Obținem $\overline{cd} = \overline{abcd} - M_{100} = M_{100}$, de unde $c = d = 0$. **32.** Fie $3k, 3k + 1, 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, cele trei numere naturale consecutive. Atunci $n = 3k(3k + 1)(3k + 2) = (9k^2 + 3k)(3k + 2) = 27k^3 + 18k^2 + 9k^2 + 6k = 27k^3 + 27k^2 + 6k = 27k^2(k + 1) + 6k = 9k \cdot 3 \cdot k(k + 1) + 6k = M_6 + M_6 = M_6$.

4. Proprietăți ale relației de divizibilitate

1. • oricare ar fi numărul natural a, $a \mid 0$; • oricare ar fi numărul natural a, $1 \mid a$; • oricare ar fi numărul natural a, $a \mid a$; • dacă $a \mid b$ și $b \mid a$, unde $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a = b$; • dacă $a \mid b$ și $b \mid c$, atunci $a \mid c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$; • dacă $a \mid b$, atunci $a \cdot m \mid b \mid m$, oricare ar fi $a, b, m \in \mathbb{N}$; • dacă $a \mid b$, atunci $a \mid b \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$; • dacă $a \mid b$ și $a \mid c$, atunci $a \mid (b + c)$ și $a \mid (b - c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$. **2.** a) $S \vdots 2$, deoarece fiecare termen se divide la 2; b) $S \vdots 3$, deoarece fiecare termen se divide la 3; c) $S \vdots 4$, deoarece fiecare termen se divide la 4; d), e), f) analog a), b), c). **3.** a) $P \vdots 2$, deoarece $82 \vdots 2$; b) $P \vdots 5$, deoarece $25 \vdots 5$; c) $P \vdots 3$, deoarece $1008 \vdots 3$; d) $P \vdots 9$, deoarece $2187 \vdots 9$; e) $P \vdots 4$, deoarece $1424 \vdots 4$; f) $P \vdots 10$, deoarece $3140 \vdots 10$. **4.** a) A. Fie n numărul. Din $n \vdots 6 \Rightarrow n = 6x, x \in \mathbb{N} \Rightarrow n = (2 \cdot 3) \cdot x = 2 \cdot (3 \cdot x) \Rightarrow n \vdots 2$; b) F. Contraexemplu: 14 este divizibil cu 2 și 14 nu este divizibil cu 6; c), d), e), f), g) analog a), respectiv b). **5.** $x \in \{0, 5\}$. **6.** a) A; b) A; c) F. **7.** a) A; b) F. **8.** a) A; b) F; c) F. **9.** a) F; b) A. **10.** a) $n \vdots 18 \Leftrightarrow n \vdots 2$ și $n \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9$; b) $n \vdots 18 \Leftrightarrow n \vdots 3$ și $n \vdots 6 \Rightarrow n \vdots 6$; c) $n \vdots 18 \Leftrightarrow n \vdots 6$ și $n \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$; d) $n \vdots 18 \Leftrightarrow n \vdots 9$ și $n \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2$. **11.** a) $n = 6$; b) 0. **12.** Din $28 \vdots a \Rightarrow 28 = a \cdot b, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \Rightarrow 2 \cdot 28 = 2 \cdot (a \cdot b) = (2 \cdot a) \cdot b \Rightarrow 56 = (2 \cdot a) \cdot b \Rightarrow 56 \vdots 2a$. Din $a \vdots 7 \Rightarrow a = 7b, b \in \mathbb{N}$ și $3a = 3 \cdot (7b) = 7 \cdot (3b) \Rightarrow 3a \vdots 7$. **13.** a) $n \in \{1, 2, 3, 6\}$; b) $n \in \{1, 3, 5\}$; c) $n \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. **14.** a) $n \in \{1, 2, 3, 6\}$; b) $n \in \{1, 7\}$; c) $n \in \{1, 3, 7\}$. **15.** a) $4 + 8 + 2$; b) $21 + 6 + 1$. **16.** a) $3 \mid (a + 2b + 3c)$, deoarece $3 \mid 3$; b) $4 \mid 16 \Rightarrow 4 \mid 16 \cdot 711$; c) $9^n + 9^{n+1} = 9^n \cdot (1 + 9) = 9^n \cdot 10$ și cum $10 \mid 10 \Rightarrow 10 \mid 9^n \cdot 10$; d) $7 \mid 1001 \Rightarrow 7 \mid 2 \cdot 1001$ ... și $7 \mid 9 \cdot 1001 = 9009 \Rightarrow 7 \mid (1001 + 2002 + ... + 9009)$. **17.** Din $2x - 6 \mid 4$ avem $2x - 6 = 1$, $2x - 6 = 2$, $2x - 6 = 4$, de unde $x = 5$. **18.** Presupunem că există $a \in \mathbb{N}$ astfel încât $245 \vdots a$ și $a \vdots 3$. Din $245 \vdots a \Rightarrow 245 = a \cdot b$, cu $b \in \mathbb{N}$ și cum $a \vdots 3 \Rightarrow a = 3c$, cu $c \in \mathbb{N}$. Vom avea $245 = (3c) \cdot b = 3 \cdot (cb)$, adică $245 \vdots 3$ (absurd). Rezultă că nu există $a \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $245 \vdots a$ și $a \vdots 3$. **19.** a) $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, iar $M_{18} = \{0, 18, 36, ...\}$, de unde $D_{18} \subset M_{18}$; b) Evident $D_{18} \subset D_a$, $a \in \{18, 36, ...\}$; c) Evident, căci card $D_{18} = 6$. **20.** $S = 1 + 2 + 3 + ... + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + ... + (25 + 26)$ și cum $17 \mid 51 \Rightarrow 17 \mid S$. **22.** $3 \mid 12$ și $6 \mid 12$, dar $18 \nmid 12$. **23.** a) $x \in \{1, 2, 3, 6\}$; b) $x \in M_4$; c) $x \in \{1, 3, 9\}$; d) $x \in \{0, 2, 8\}$. **24.** $2^{n+3} - 2^{n+1} - 2^n = 2^n \cdot (2^3 - 2^1 - 1) = 2^n \cdot 5$ și $(2^n \cdot 5) \vdots 5$. **25.** $11 \cdot 5^n + 4 \cdot 5^{n+1} + 5^{n+2} = 5^n \cdot (11 + 4 \cdot 5 + 25) = 5^n \cdot 56$ și cum $7 \mid 56 \Rightarrow 5^n \cdot 56 \vdots 7$. **26.** $15^{2n+1} - 5^{2n} \cdot 9^{n+1} = 15^{2n} \cdot (15 - 9) = 15^{2n} \cdot 6 = 90 \cdot 15^{2n-1}$ care este multiplu de 90. **27.** a) $a \in \{1, 5\}$; b) $a \in \{-1, 1\}$; c) $a \in \{-1, 3\}$. **28.** $3 \mid \overline{17x} \Rightarrow x \in \{1, 4, 7\}$ și $\overline{47x} \in \{471, 474, 477\}$. **29.** $\overline{12z} + \overline{47y} + \overline{13x} = 120 + 470 + 130 + x + y + z = 720 + x + y + z = M_9 + x + y + z = M_9$, căci din $9 \mid \overline{xyz}$ rezultă $9 \mid (x + y + z)$. **30.** a) Din $10 \mid 2a + 3b \Rightarrow 5 \mid 2a + 3b + 5a + 5b \Rightarrow 5 \mid 7a + 8b$; b) Din $10 \mid (3a + b)$ și $10 \mid (10a + 10b) \Rightarrow 10$ divide diferența lor, adică $10 \mid (7a + 9b)$. **31.** a) $3 \mid (2x + y)$ și $3 \mid 3(x + y) \Rightarrow 3 \mid (5x + 4y)$; b) $9 \mid (x + 3y)$ și $9 \mid 9(x + 3y) \Rightarrow 9 \mid (8x + 24y)$. **32.** a) Se grupează câte două și se scoate factor comun; b) analog, se grupează câte trei. **33.** a) Factorii 5, 10, 15, 20, 25 conțin pe 5, respectiv 5^2 și analog pentru factorii care sunt multipli de 2. Cum $5^6 \cdot 2^6 = 10^6 \Rightarrow A \vdots 10^6$; b) $n = 10$. **34.** $37 \mid (x + y + z) \Rightarrow 37 \mid 2 \cdot (x + y + z)$ și cum $37 \mid (5x + 7y + 8z) \Rightarrow 37$ divide diferența lor $\Rightarrow 37 \mid (3x + 5y + 4z)$. **35.** a) Din oricare patru numere naturale există două care dau același rest la împărțirea cu 3 (restul împărțirii unui număr natural la 3 poate fi 0, 1, 2). Diferența celor două numere care dau același rest la împărțirea cu 3 este un număr divizibil cu 3; b) Analog a). **36.** a) $n \in \{1, 4\}$; b) $n \in \{3\}$; c) $n \in$

$\in \{0, 3\}$; d) $n \in \{1, 5\}$. **37.** $A = \{6\}$, $B = \{0, 3\}$. **38.** a) $(x, y) \in \{(1, 14), (13, 2)\}$; b) $(x, y) \in$ $\in \{(0, 5), (4, 1)\}$.

5. Numere prime şi numere compuse

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Sunt 25 de numere prime mai mici decât 100. **2.** a) $A = \{101, 103, 107, 10, 113\}$; b) $B = \{102, 104, 105, 106, 108, 110, 112, 114, 115, 116, 118, 119, 120\}$. **3.** a) Împărţindu-l pe 109 pe rând la numerele prime 2, 3, 5, 7, 11, se obţin resturi diferite de zero, iar $109 = 11 \cdot 9 + 10$ şi câtul este mai mic decât restul. Ca urmare, 109 este număr prim; b) analog a); c) se împarte numărul 961 pe rând la numere prime până când restul este 0. Se obţine că $961 = 31 \cdot 31 + 0$ şi ca urmare 961 este număr compus. **4.** Divizorii primi ai numărului 48 sunt 2 şi 3, ai numărului 72 sunt 2 şi 3, iar ai numărului 202 sunt 2 şi 101. **5.** Se fac împărţiri succesive la numere prime până când câtul este mai mic decât împărţitorul şi dacă se obţine un rest 0, atunci numărul este compus. În caz contrar, numărul este prim. **6.** a) $27 = 18 + 9$; b) $19 = 10 + 9$; c) $36 = 30 + 6$. **7.** a) $30 = 17 + 13 = 11 + 19 = 23 + 7$; b) $100 = 11 + 89 = 47 + 53 = 41 + 59$; c) $138 = 7 + 131 = 29 + 109$; d) $35 = 37 - 2$; e) $84 = 97 - 13$; f) $96 = 101 - 5$. **8.** a) $x = 2, y = 37$ sau $x = 37, y = 2$; b) $x = 7, y = 13$ sau $x = 13, y = 7$; c) $x = 97, y = 2$. **9.** $x = 7$. **10.** Cum $\overline{xx} \in \{11, 22, ..., 99\}$, rezultă că perechile sunt: (2, 31); (2, 53); (2, 97); (11, 11); (3, 19); (3, 41); (5, 17); (7, 37); (13, 31); (5, 61); (7, 59); (13, 53); (19, 47); (23, 43); (29, 37); (5, 83); (17, 71); (29, 59). **10.** Cum numerele prime mai mari decât 2 sunt impare şi suma a două numere impare este număr par diferit de 2, rezultă că suma se divide la 2, adică este număr compus. **12.** Cum două numere prima mai mari decât 2 sunt impare, evident că suma lor este un număr par mai mare ca 2, deci compus. **13.** Cum produsul a două numere este număr par şi unul din numere este impar, înseamnă că celălalt număr trebuie să fie par. Cum este şi prim şi singurul număr prim şi par este 2, rezultă că numerele sunt 2 şi 2433. **14.** 97. **15.** Cum $16b$ este număr par şi 54 este număr par, rezultă că şi $3a$ trebuie să fie număr par. Cum $2 \nmid 3 \Rightarrow a \,\vdots\, 2$. Cum singurul număr prim şi par este 2, rezultă $a = 2$ şi $b = 3$. **16.** a) $N_1 \cap N_2 = \varnothing$; b) $1 \in N_1$, $2 \in N_2$, $2 \in Pr$, $2 \in N_2 \cap Pr$, $3 \in N_1$, $3 \in Pr$, $3 \in N_1 \cap Pr$, $4 \in N_2$. **17.** 13, 17, 37, 79. **18.** 2. **19.** 2. **20.** $2^{2n} \cdot 5^{2n+1} + 1 = 2^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 5 + 1 = 10^{2n} \cdot 5 + 1 = 1\underbrace{000...0}_{2n \text{ zerouri}} \cdot 5 + 1 = 5\underbrace{000...0}_{2n-1 \text{ zerouri}}1$ şi suma cifrelor este $6 \Rightarrow$ numărul se divide cu 3, adică este compus. **21.** Din două numere consecutive, sigur unul este par. Cum singurul număr prim şi par este 2, rezultă că numerele sunt 2 şi 3. **22.** Dacă n este prim şi par, adică $n = 2 \Rightarrow n + 7 = 2 + 7 = 9$ şi 9 nu este număr prim, iar dacă n este diferit de 2, înseamnă că n este număr impar, iar $n + 7$ este număr par mai mare ca 2 şi ca urmare nu poate fi număr prim. **23.** Dacă suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 6, atunci numărul se divide cu 3 şi ca urmare nu poate fi număr prim. **24.** Compus, deoarece numărul are forma $6k + 3 = 3(2k + 1)$, care se divide la 3. **25.** a) 131, 137, 139; b) 223, 227, 229; c) 433, 443, 463; d) 233, 433, 733. **26.** a) F; b) A; c) F; d) A. **28.** Numerele au una din formele $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$. Cum numerele de forma $6k + 2$, $6k + 3$ şi $6k + 4$ sunt compuse, rezultă că numerele au forma $6k + 1$ şi $6k + 5$ şi ca urmare resturile pot fi 1 sau 5. **29.** Cum $n(n + 1) + 5n = n^2 + n + 5n = n^2 + 6n = n(n + 6)$ este prim, rezultă că $n = 1$ şi $n + 6 = 7$. **30.** Se consideră $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot 109 \cdot 113 + 2$. Se observă că $n, n + 2, n + 4, ..., n + 110$ sunt numere pare şi deci sunt compuse. Fie $x \in \mathbb{N}$ cu $0 < x \le 109 \Rightarrow 2 < x + 2 \le 111$ şi dacă $x + 2$ este număr prim, fiind mai mic sau egal cu 111, se află şi în produsul $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot 109 \cdot 113$, iese factor comun şi ca urmare $n + x$ este număr compus, iar dacă $x + 2$ nu este număr prim, înseamnă că este compus şi se divide cu un număr prim mai mic sau egal cu 36 şi ca urmare $n + x$ se divide cu acest număr. **31.** a) Pentru $n = 4k$, $u(3^n + 7) = 8$; $n = 4k + 1$, $u(3^n + 7) = 0$; $n = 4k + 2$, $u(3^n + 7) = 6$; $n = 4k + 3$, $u(3^n + 7) = 4$, adică $3^n + 7$ este par, adică compus; b) Analog a) avem $7^n + 5$ este par, deci compus; c) Ultima cifră a lui $16 \cdot 10^n + 5$ este 5, deci compus, căci se divide cu 5. **32.** Deoarece orice număr natural se poate scrie sub forma $8k$, $8k + 1$, $8k + 2$, $8k + 3$, $8k + 4$, $8k + 5$, $8k + 6$, $8k + 7$, $k \in \{0, 1, ...\}$, atunci numerele prime sunt în una din mulţimile de impare: $8k + 1$, $8k + 3$, $8k + 5$, $8k + 7$. Cum avem în total 5 numere, evident, conform principiului cutiei, el este unul din cele 4 forme ale numărului dat, repetată pentru un alt k. De aici concluzia: dacă alegem doi reprezentanţi din aceeaşi mulţime, evident că diferenţa lor este multiplu de 8.

6. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

1. a) $A = 18 = 2 \cdot 3^2$ şi $B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow A \cdot B = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ şi analog pentru celelalte. **2.** a) $A \cdot B = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 7^2$; b) $A \cdot C = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 11$; c) $B \cdot C = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$; d) $A \cdot B \cdot C = 2^8 \cdot 3^7 \cdot 7^2 \cdot 11$; e) $A : B = 2 \cdot 3^4$; f) $C : B = 2 \cdot 11$. **3.** Se foloseşte $A = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ are $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ divizori $\Rightarrow 32 = 2^5$ are $5 + 1 = 6$ divizori, $27 = 3^3$ are $3 + 1 = 4$ divizori şi analog. **4.** $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$; $D_{125} = \{1, 5, 25, 125\}$; $D_{256} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$; $D_{361} = \{1, 19, 361\}$; $D_{1058} = \{1, 2, 23, 46, 529, 1058\}$. **5.** De exemplu, 4 şi 9 au câte 3 divizori fiecare. **6.** a) 36 şi 37; b) 48 şi 49; c) 55 şi 56. **7.** a) 35, 36 şi 37; b) 47, 48 şi 49; c) 54, 55 şi 56. **8.** $5625 = 3^2 \cdot 5^4$ şi $1728 = 2^6 \cdot 3^3$. Numărul are 4 zerouri. **9.** $121 = 11^2$. **10.** 37 şi 73. **11.** $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. **12.** $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 5 = 10$ şi $3 \cdot 5 = 15$. **13.** $2 \cdot 1763$. **14.** $\overline{ab} \in \{29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92\}$. **15.** $3^{n+1} \cdot 2^{n+3}(3 + 2) = 3^{n+1} \cdot 2^{n+3} \cdot 5$ şi $3^{n+1} \cdot 2^{n+3} \cdot 5 \,\vdots\, (3^2 \cdot 2^4 \cdot 5)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **16.** $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 13 \cdot 19 \Rightarrow \overline{ab} = 13$ şi $\overline{cd} = 19$ sau $\overline{ab} = 19$ şi $\overline{cd} = 13 \Rightarrow 1319$ sau 1913. **17.** Din $x^2(y + 3) = 2^5 \cdot 3^3 = 2^2 \cdot (2^3 \cdot 3^3) = 2^4 \cdot (2 \cdot 3^3) = ...$ rezultă toate cazurile care se vor analiza. **18.** a) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; b) $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. **19.** $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$ şi are $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$ divizori. **20.** $\overline{ab} \cdot 10101 = \overline{ab} \cdot 3 \cdot 13 \cdot 37$ şi are 32 de divizori. **21.** Pentru ca numărul să aibă 6 divizori, trebuie să admită o descompunere în factori primi de forma a^5 sau $a^1 \cdot b^2$, iar pentru ca numărul să fie cât mai mic trebuie ca a şi b să fie cele mai mici numere prime. Dintre 2^5 şi $2^2 \cdot 3^1$ mai mic este $2^2 \cdot 3$ şi ca urmare 12 este numărul căutat. **22.** 95. **23.** A se termină în 12 zerouri, B se termină în 14 zerouri. **24.** $x^2(y + 3) = 12^2(y + 3)$, de unde $x = 12$, $y = 3$. **25.** 6, 8, 14, 16. **26.** $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$. **28.** a) $\{1, a, a \cdot a, a \cdot a \cdot a, ..., \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{x}\} = D_{a^x}$; sunt $x + 1$ divizori; b) $\{1, b, a, a \cdot a, a \cdot a \cdot a, ..., \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{x}, ab, a, a \cdot a \cdot b, ..., \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{x} b\}$, adică există $2x + 2$ divizori. **29.** Se calculează ultima cifră a numărului. Cum ultima cifră a numerelor a, c, respectiv d este pară, rezultă că numărul este compus. Cum ultima cifră a numărului b este 5, rezultă că numărul este divizibil cu 5, adică este compus. **30.** a) $x^2 + x + y = 58 \Rightarrow x(x + 1) + y = 58$. Cum produsul a două numere consecutive este număr par şi 58 este număr par, rezultă că y este număr par. Cum y este număr prim, rezultă că $y = 2$ şi $x(x + 1) = 56 \Rightarrow x = 7$; b) $x = 2, y = 2, x = 7, y = 1$; c) $2010 = 2 + 3 + 5 + 67 + \underbrace{1+1+1+...+1}_{1933 \text{ termeni de } 1}$ şi $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{1933 \text{ factori de } 1}$. **31.** a) $3 \cdot 4$; b) $33 \cdot 34$; c) $333 \cdot 334$; d) $\underbrace{333...3}_{2013 \text{ ori}} \cdot \underbrace{333...3}_{2012 \text{ ori}}4$.

Capitolul II. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE (II)

1. Divizori comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.d.c.; numere prime între ele

1. a) 2; b) 2; c) 5; d) 3; e) 3; f) 2; g) 10; h) 2; i) 2; j) 5; k) 12; l) 1. **2.** a) $(14, 18) = 2$; b) $(30, 42) = 6$; c) $(30, 70) = 10$; d) $(70, 42) = 14$. **3.** a) 6; b) 3; c) 2; d) 12; e) 36; f) 378; g) 50; h) 28. **4.** $(2, 9) = 1$; $(4, 9) = 1$; $(9, 14) = 1$. **5.** $102 = 2 \cdot 51 = 3 \cdot 34 = 6 \cdot 17 = 1 \cdot 102 = 102 \cdot 1 = 17 \cdot 6 = 34 \cdot 3 = 51 \cdot 2$. **6.** (12, 180); (36, 60); (60, 36); (180, 12). **7.** Avem: (1, 15); (3, 13); (5, 11); (7, 9); (9, 7); (11, 5); (13, 3); (15, 1). **8.** a) F; b) F; c) F. **9.** $\overline{17xy} \in \{1710, 1740, 1770, 1722, 1752, 1782, 1704, 1734, 1764, 1794, 1716, 1746, 1776, 1728, 1758, 1788\}$. **10.** $\overline{xyy} \in \{900, 522, 144, 666, 388\}$. **11.** $\overline{xyzz} \in \{1800, 8100, 2700, 7200, 3600, 6300, 4500, 5400, 9000\}$. **12.** 4044, 1344, 3144. **13.** 60 şi 36. **14.** (7, 28); (14, 21); (21, 14); (28, 7). **15.** a) 3120, 3420, 3720, 3222, 3522, 3822, 3024, 3324, 3624, 3924, 3126, 3426, 3726, 3228, 3528, 3828; b) 3420, 3024, 3924, 3120, 3720, 3324, 3624, 3228,

3528, 3828; c) 3120, 3420, 3720, 3225, 3525, 3825; d) 3420, 3222, 3024, 3924, 3726, 3528. **16.** 4710, 4215. **17.** a) (1, 11); (11, 1); (5, 7); (7, 5). b) (1, 13); (13, 1); (3, 11); (11, 3); (5, 9); (9, 5). c) (1, 14); (14, 1); (2, 13); (13, 2); (4, 11); (11, 4); (7, 8); (8, 7). d) (1, 17); (17, 1); (5, 13); (13, 5); (7, 11); (11, 7). **18.** 9000, 5202, 1404, 6606, 2808. **19.** a) $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$; b) $x \in \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. **20.** 33; 121; 363. **21.** a) (7, 84); (84, 7); (21, 28); (28, 21); b) (18, 306); (90, 234); (126, 198); (306, 18); (234, 90); (198, 126). **22.** 5010; 5040; 5070. **23.** a) Presupunem că $(3n + 7, 4n + 9) \neq 1 \Rightarrow$ există $d \neq 1$ cu $d \mid 3n + 7$, $d \mid 4n + 9 \Rightarrow d \mid 4(3n + 7)$ şi $d \mid 3(4n + 9) \Rightarrow$ $\Rightarrow d \mid (12n + 28)$ şi $d \mid (12n + 27) \Rightarrow d$ divide diferenţa $\Rightarrow d \mid 1$ (absurd) deoarece $d \neq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (3n + 7, 4n + 9) = 1$. Analog pentru celelalte. **24.** 160. **25.** 221.

2. Multipli comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.m.c.

1. a) 12; b) 8; c) 30; d) 20; e) 200; f) 16; g) 72; h) 12. **2.** a) [2, 8]; b) [1, 13]; c) [12, 24]; d) [9, 4] = = 36. **3.** a) 144; b) 900; c) $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8640$; d) 26460; e) 10080; f) 11340; g) 1350; h) 1008. **4.** 35. **5.** $x = 6c_1 + 3$ şi $x = 15c_2 + 3 \Rightarrow x - 3 = [6, 15] = 30 \Rightarrow x = 33$. **6.** a) $(a, b) = 84$; $[a, b] = 2520$; b) $(a, b) = 24$; $[a, b] = 864$; c) $(a, b) = 2$; $[a, b] = 7350$. **7.** a) A; b) F; c) F; d) F. **8.** $[6, 7, 9] = 126 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \{126, 252, 378, \ldots\}$. Cum $2200 < x < 2300 \Rightarrow x = 2268$. **9.** (28, 784); (196, 112); (784, 28); (112, 196). **10.** 39. **11.** 119. **12.** a) (48, 144), (144, 48); b) (231, 693), (693, 231); c) (48, 144), (144, 48); d) (48, 144), (144, 48). **13.** $2 \cdot 3^{48}$. **14.** 24 de elevi. **15.** $x = 6c_1 + 5$; $x = 7c_2 + 6$; $x = 11c_3 + 10 \Rightarrow x + 1 \in$ $\in M_{[6,7,11]}$ şi $900 < x < 1000 \Rightarrow x + 1 = 924 \Rightarrow x = 923$. **16.** [2, 3, 8] = 24. **17.** a) (48, 144) = 48; [48, 144] = 144; b) (231, 693) = 231; [231, 693] = 693; c) (1890, 2268) = 2; [1890, 2268] = = 2 143 060; d) (372, 360, 900) = 12; [372, 360, 900] = 1800. **18.** 123; **19.** 242, 302, 362, 422, 482. **20.** 168, respectiv 175. **21.** C.m.m.m.c. al numerelor 10, 12 şi 18 este 180. Fie x numărul elevilor $\Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \{180, 2 \cdot 180, 3 \cdot 180, \ldots, n \cdot 180, \ldots\}$. Cum $1300 < x < 1500 \Rightarrow x = 1440$. **22.** Se poate rezolva direct folosind formula $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b \Rightarrow$ a) 1080; b) 350; c) 420. **23.** a) $2^{n+2} \cdot 5^{n+1} + 1 =$ $= 2^{n+1} \cdot 2 \cdot 5^{n+1} + 1 = (2 \cdot 5)^{n+1} \cdot 2 + 1 = 2\underbrace{00\ldots0}_{n+1 \text{ zerouri}} + 1 = 2\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zerouri}}1$. Cum suma cifrelor numărului este 3 $\Rightarrow$ numărul se divide cu 3; b) Fie numerele consecutive n, $n + 1$, $n + 2$ şi $n + 3 \Rightarrow P = n \cdot (n + 1)(n + 2)(n + 3)$. Din 3 numere consecutive, sigur unul este multiplu de 3 şi din 4 numere consecutive sigur unul este multiplu de 2 şi altul multiplu de 4, adică produsul se divide cu 24. **24.** a) $S = 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} + 3^{n+4} + 3^{n+5} = 3^n \cdot (1 + 3 + 3^2) + 3^{n+3} \cdot (1 + 3 + 3^2) = 3^n \cdot 13 + 3^{n+3} \cdot 13 = 13(3^n + 3^{n+3}) = 13 \cdot 3^n \cdot (1 + 3^3) = 13 \cdot 3^n \cdot 28 = 3^n \cdot 364 \vdots 364$; b) Analog a). **25.** a) Din teorema împărţirii cu rest avem $D = Î \cdot C + R$, $R < Î \Rightarrow D = 55 \cdot C + 22 = 11 \cdot (5C + 2) \vdots 11$; b) Analog a) din $D = 6 \cdot C_1 + 5 \Rightarrow D = 6 \cdot C_1 + 3 + 2 = 3 \cdot (2C_1 + 1) + 2 \Rightarrow$ numărul împărţit la 3 dă restul 2 şi din datele problemei numărul împărţit la 3 ar da restul 1, ceea ce este absurd. Deci, nu există niciun număr natural care împărţit la 6 să dea restul 5 şi împărţit la 3 să dea restul 1. **26.** Arătăm că $(2n + 5, 5n + 12) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Presupunem că există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$ astfel încât $d \mid 2n + 5$ şi $d \mid 5n + 12$. Atunci $d \mid 1$, adică $d = 1$. Fals! Urmează că $[a, b] = a \cdot b$. **27.** a) $(a + b)(a - b) = (4x + 8)(2x + 2) = 8(x + 2)(x + 1)$. Cum $x + 1$ şi $x + 2$ sunt consecutive, atunci $(x + 2)(x + 1)$ este număr par, adică $(a + b)(a - b)$ este multiplu de 2^4; b) Avem $b \mid a + 8$, adică $x + 3 \mid 3x + 13$, de unde avem $x + 3 \mid 3x + 13$ şi $x + 3 \mid x + 3$, deci $x + 3 \mid 6$ sau $x \in \{0, 3\}$. **29.** Orice număr natural se găseşte în una şi numai una din mulţimile disjuncte de forma $4\mathbb{N}$, $4\mathbb{N} + 1$, $4\mathbb{N} + 2$, $4\mathbb{N} + 3$. Evident că mulţimile $4\mathbb{N}$ şi $4\mathbb{N} + 2$ sunt formate din numere pare. Cum avem numere prime, evident că ele fac parte din mulţimile $4\mathbb{N} + 1$ sau $4\mathbb{N} + 3$ care conţin numere impare. Cum avem 3 numere prime, conform principiului cutiei, 2 dintre ele se găsesc în aceeaşi mulţime, de unde evident că diferenţa lor este divizibilă cu 4. **30.** Calculăm A_0. Obţinem $A_0 = 35$, de unde obţinem $5 \mid 35$ sau $7 \mid 35$. Calculând A_1, găsim $u(A_1) \neq 0$ sau 5. Urmează că 7 ar putea fi cel mai mare divizor comun al numerelor $A_1, A_2, \ldots, A_{2005}$. Vom arăta acest lucru. Avem $2^{3n} = 8^n = (7 + 1)^n = M_7 + 1$ (1); $3^{6n+2} = 3^{2(3n+1)} = 9^{3n+1} = (7 + 2)^{3n+1} = M_7 + 2^{3n+1} = M_7 + 2 \cdot 2^{3n} = M_7 + 2(M_7 + 1) = M_7 + 2$ (2); $5^{6n+2} = (7 - 2)^{6n+2} = M_7 + 2^{6n+2} = M_7 + 4 \cdot 2^{3n} \overset{(1)}{=} M_7 + 4(M_7 + 1) = M_7 + 4$ (3). Avem $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2} \overset{(1),(2)(3)}{=} M_7 + 1 + M_7 + 2 + M_7 + 4 = M_7 + 7 = M_7$, ceea ce arată că 7 este cel mai mare divizor comun.

3. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea

1. $A = \{1, 2, 3, 6, 12\}$, $B = \{2, 6, 12, 18\}$, $C = \{1, 3, 5, 15\}$, $D = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. **2.** $\overline{xyxy} \in$ $\in \{1515, 3030, 4545, 6060, 7575, 9090\}$. **3.** $u(N) = 0 \Rightarrow 5 \mid N$. **4.** $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + \ldots + 2^{n+5} = 2^n(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^5) = 2^n \cdot 63 \vdots 7$. **5.** Unul din numere este 2 şi celălalt este număr prim $\Rightarrow$ cele două numere sunt prime între ele. **6.** (2, 109); (2, 331); (2, 997). **7.** $14 = 2 \cdot 7 = (1 + 1)(6 + 1) \Rightarrow A = a^1 \cdot b^6 = 2^6 \cdot 3 = 192$. **8.** $(1 + 1)(1 + 1) \cdot \ldots \cdot (1 + 1) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k \text{ factori}} = 2^k$. **9.** $10^x + 8 = 1\underbrace{0\ldots0}_{x \text{ zerouri}} + 8 = 1\underbrace{000\ldots0}_{x-1 \text{ zerouri}}8 \vdots 2$ şi $1\underbrace{00\ldots0}_{x-1 \text{ zerouri}}8 \vdots 3 \Rightarrow 1\underbrace{00\ldots0}_{x-1 \text{ zerouri}}8 \vdots 6$. **10.** $u(34^{43} - 43^{34}) = 5 \Rightarrow (34^{43} - 43^{34}) \vdots 5$. **11.** a) $\overline{1a3}$ are 4 divizori pentru $a \in \{2, 3, 4\}$; b) Pentru $a \in \{0, 1, 5, 6, 7, 8, 9\}$ numărul $\overline{1a3}$ este prim. **12.** a) $a \in$ $\in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; c) analog b). **13.** $x \in \{0, 3, 6, 9\}$ pentru a), b). **14.** Resturile împărţirii celor 4 numere la 3 nu pot fi toate distincte. Alegând două numere care dau acelaşi rest diferenţa lor se divide cu 3. **15.** Analog ex. 14. **16.** a) $(x, y) \in \{(1, 25); (5, 5); (25, 1)\}$; b) $\varnothing$; c) $(x, y) \in$ $\in \{(1, 21); (2, 9); (3, 5); (4, 3); (6, 1); (8, 0)\}$. **17.** a) $a \in \{0, 1, 5, 10, 25\}$; b) $a \in \{0, 11\}$; c) $a \in \{1, 2, 3, 8\}$. **18.** $(a, b) \in \{(0, 12); (6, 6); (8, 4); (9, 3); (10, 2); (11, 1)\}$. **19.** 143. **20.** $a = 4$, $b = 16$ sau $a = 16$, $b = 4$. **21.** $a = 30$. **22.** 72 m. **23.** $a = 10$, $b = 30$. **24.** Se înlocuieşte x cu cifrele 0, 1, …, 9. **25.** Fie $d = (a + b, a - b) \Rightarrow d \mid a + b$, $d \mid a - b \Rightarrow d \mid 2a$ şi $d \mid 2b$ şi cum $(a, b) = 1 \Rightarrow d \in \{1, 2\}$. **26.** 17. **27.** 1205, 1223, 1241, 1259, 1277, 1295. **28.** 259. **29.** 1015, 1267, 1519. **30.** 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001. **31.** a) Presupunem că $(2n + 3, 5n + 7) \neq 1 \Rightarrow (\exists)\, d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$ astfel încât $d \mid (2n + 3)$ şi $d \mid (5n + 7) \Rightarrow d \mid 5 \cdot (2n + 3)$ şi $d \mid 2 \cdot (5n + 7) \Rightarrow d \mid (10n + 15)$ şi $d \mid (10n + 14) \Rightarrow d$ divide diferenţa lor $\Rightarrow d \mid 1$ (absurd) deoarece $d \neq 1 \Rightarrow$ presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow (2n + 3, 5n + 7) = 1$. Analog pentru celelalte. **32.** a) (45, 60); (60, 45); (15, 180); (180, 15); b) (105, 120); (120, 105); (60, 165); (165, 60); (30, 195); (195, 30); (15, 210); (210, 15); c) (14, 490); (490, 14); (98, 70); (70, 98); d) (720, 48); (48, 720); (144, 240); (240, 144). **33.** 91206, 81216, 11286, 21276, 71226, 31266, 61236, 41256, 51246. **34.** 4644, 8388. **35.** 1232, 3232, 5232, 7232, 9232, 1236, 3236, 5236, 7236, 9236. **36.** 4044, 4344, 4644, 4944, 8088, 8388, 8688, 8988. **37.** a) $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$; b) $x \in \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$; c) $x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$; d) $x \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$; e) $x \in \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; f) $x \in \{1, 5, 7\}$. **38.** $A = 12^n \cdot 2^2 \cdot 17 \vdots 17$. **39.** $A = 33 \cdot 63^n \vdots 33$. **40.** $A = 31 \cdot 21^n$. **41.** $A = 11^2 \cdot 3^n \vdots 11$. **42.** $A = 23 \cdot 2^n \vdots 23$. **43.** $A = \{3420, 3222, 3024, 3924, 3726, 3528\}$, $B = \{3120, 3420, 3720, 3024, 3324, 3624, 3924, 3228, 3528, 3828\}$, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{3120; 3720; 3222; 3726; 3324; 3624; 3228; 3828\}$. **44.** a) numărul conţine 2016 termeni, numere impare şi grupându-i câte doi se obţine suma a 1008 termeni pari care este număr par. b) Se grupează termenii câte 3 şi se obţin 672 grupe, adică $a = (1 + 3 + 3^2) + 3^3(1 + 3 + 3^2) + \ldots + 3^{2013}(1 + 3 + 3^2) \Rightarrow a = 13 + 3^3 \cdot 13 + 3^6 \cdot 13 + \ldots + 3^{2013} \cdot 13 = 13 \cdot (1 + 3^3 + 3^6 + \ldots + 3^{2013}) \vdots 13$. **45.** a) Din $a = \overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} = 100x + 10y + z + 100y + 10z + x + 100z + 10x + y = 111x + 111y + 111z = 111(x + y + z) \Rightarrow a \vdots 111$. b) Cum $a = 111(x + y + z) = 3 \cdot 37(x + y + z) \Rightarrow a$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă $x + y + z = 111m^2$. Cum x, y şi z sunt cifre $\Rightarrow x + y + z \leq 27$ şi ca urmare $x + y + z \neq 111m^2$, adică a nu poate fi pătrat perfect.

4. Probleme de matematică aplicată în viaţa cotidiană

1. Dacă un pacheţel de zahăr vanilat costă x lei, iar o cutie de chibrituri costă y lei, atunci preţul plătit pentru 3 pacheţele de zahăr vanilat şi 6 cutii de chibrituri este $3x + 6y$. Este evident că $3x \cdot 100 + 6y \cdot 100 \in \mathbb{N}$. Preţul plătit pentru cumpărături este $0{,}90 + 2{,}70 + 3x + 6y = 29{,}17$. Înmulţind cu 100 rezultă $90 + 270 + 3x \cdot 100 + 6y \cdot 100 = 2917$. Membrul stâng este divizibil cu 3 şi cu 10, dar 2917 nu este. Prin urmare, sesizarea greşelii se poate face rapid, fără niciun fel de calcule. **2.** Fie n

numărul de ouă din coş. Atunci $n = 2p + 1$. Deci, în coş este un număr impar de ouă. Deoarece $n = 7q$, rezultă că ultima cifră a lui n, notată cu $u(n)$, poate fi 1, 3, 5, 7, 9. Dar $n = 5 \cdot s + 1 \Rightarrow n - 1 = 5 \cdot s \Rightarrow u(n-1) \in \{0, 5\} \Rightarrow u(n) = 1$. Multiplii lui 7 care se termină în 1 sunt $7 \cdot 3$, $7 \cdot 13$, $7 \cdot 23$, $7 \cdot 33$, $7 \cdot 43$ etc. Numărul care verifică ecuaţiile din enunţ este 301. **3.** 2519 portocale. **4.** c.m.m.m.c. $[4, 8, 12, 16] = 48$. Deci, vapoarele se întâlnesc în port după 48 de săptămâni, adică $48 \cdot 7 = 336$, mai rămân 29 de zile dintr-un an. Vapoarele s-au întâlnit din nou în port pe 14 iunie 2010, după-amiază. **5.** Notăm cu n numărul de cutii; atunci $411 : n$ reprezintă numărul de bomboane de tip A din fiecare cutie. Rezultă n divide 411; analog n divide 685 şi n este cel mai mare, deci $n = \text{c.m.m.d.c.}(411, 685) = 137$. Prin urmare, sunt 137 de cutii, fiecare cu câte 3 bomboane de tip A şi 5 bomboane de tip B.

5. Recapitulare şi sistematizare prin teste

Testul 1: **1.** a) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ şi $441 = 3^2 \cdot 7^2$; b) $[210, 441] = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 4410$. **2.** a) $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$; $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; b) $(294, 252) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. **3.** Cum $(a, b) = 6 \Rightarrow a = 6x$, $b = 6y$, cu $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) = 1$. Din $a + b = 42 \Rightarrow 6x + 6y = 42 \mid : 6 \Rightarrow x + y = 7 \Rightarrow$

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1
$a = 6x$	6	12	18	24	30	36
$b = 6y$	36	30	24	18	12	6

Numerele a şi b sunt: $(a, b) \in \{(6, 36); (12, 30); (18, 24); (24, 18); (30, 12); (36, 6)\}$

4. Cum $[a, b] = 180$; $a \cdot b = 1620$ şi $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b \Rightarrow 180 \cdot (a, b) = 1620 \Rightarrow (a, b) = 9 \Rightarrow$ c.m.m.d.c. este 9. **5.** Cum $(\overline{13x}, 18) = 1 \Rightarrow (\overline{13x}, 2 \cdot 3^2) = 1 \Rightarrow \overline{13x}$ să nu aibă ca divizori pe 2 şi 3^2. Cum $2 \mid \overline{13x} \Leftrightarrow x \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow 2 \nmid \overline{13x} \Leftrightarrow x \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow \overline{13x} \in \{131, 133, 135, 137, 139\}$. Se verifică dacă numerele sunt divizibile cu 9 şi se obţine $9 \mid 135 \Rightarrow x \in \{1, 3, 7, 9\}$. **6.** Presupunem că $2x + 1$ şi $3x + 2$ nu sunt prime între ele. Înseamnă că există un număr natural $d \neq 0$, $d \neq 1$ astfel încât $d \mid (2x + 1)$ şi $d \mid (3x + 2) \Rightarrow d \mid 3 \cdot (2x + 1)$ şi $d \mid 2 \cdot (3x + 2) \Rightarrow d$ divide diferenţa lor $\Rightarrow d \mid 1$ (absurd), deoarece $d \neq 1$. Rezultă că $2x + 1$ şi $3x + 2$ sunt prime între ele. **7.** Din $(a, b) = 21 \Rightarrow a = 21x$, $b = 21y$, $(x, y) = 1$. Dar $a \cdot b = 15435 \Rightarrow 21x \cdot 21y = 15435 \Rightarrow x \cdot y = 35 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, 35); (5, 7); (7, 5); (35, 1)\}$ şi $(a, b) \in \{(21, 756); (105, 147); (147, 105); (756, 21)\}$. **8.** Din teorema împărţirii cu rest rezultă $n = 2 \cdot c_1 + 1$, $n = 3 \cdot c_2 + 2$, $n = 5 \cdot c_3 + 4 \Rightarrow n + 1 = 2 \cdot (c_1 + 1)$, $n + 1 = 3 \cdot (c_2 + 1)$, $n + 1 = 5 \cdot (c_3 + 1) \Rightarrow n + 1 = [2, 3, 5] \Rightarrow n + 1 = 30 \Rightarrow n = 29$. **9.** Dimensiunile sunt 4,5 m = 45 dm şi 3,5 m = 35 dm. Notăm cu x lungimea laturii unei plăci de gresie, exprimată în decimetri. Rezultă că x trebuie să fie divizor comun al numerelor 45 şi 35 şi cum numărul de plăci trebuie să fie minim, rezultă că x este c.m.m.d.c. al celor două numere. Adică $x = (45, 35) = 5$, lungimea laturii unei plăci de gresie fiind de 5 dm = 50 cm.

Testul 2: **1.** a) $440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$ şi $539 = 7^2 \cdot 11$; b) $[440, 539] = 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7^2 = 21560$. **2.** a) $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ şi $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; b) $(525, 420) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. **3.** Cum $(a, b) = 14 \Rightarrow a = 14x$, $b = 14y$, cu $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) = 1$. Din $a + b = 98 \Rightarrow 14x + 14y = 98 \mid : 14 \Rightarrow x + y = 7 \Rightarrow$

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1
$a = 14x$	14	28	42	56	70	84
$b = 14y$	84	70	56	42	28	14

Numerele a şi b sunt: $(a, b) \in \{(14, 24); (28, 70); (42, 56); (56, 42); (70, 28); (84, 14)\}$.

4. Cum $[a, b] = 385$; $a \cdot b = 2695$ şi $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b \Rightarrow 385 \cdot (a, b) = 2695 \Rightarrow (a, b) = 7 \Rightarrow$ c.m.m.d.c. este 7. **5.** Cum $(\overline{25x}, 12) = 1 \Rightarrow (\overline{25x}, 2^2 \cdot 3) = 1 \Rightarrow \overline{25x}$ nu are ca divizori pe 2 şi 3. Cum $2 \mid \overline{25x} \Leftrightarrow x \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow x$ trebuie să fie număr impar, adică $\overline{25x} \in \{251, 253, 255, 257, 259\}$. Numerele de forma $\overline{25x}$ nu trebuie să fie divizibile cu $3 \Rightarrow \overline{25x} \in \{251, 253, 257, 259\}$. **6.** Presupunem că $4x + 3$ şi $5x + 4$ nu sunt prime între ele. Înseamnă că există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$ astfel încât $d \mid (4x + 3)$ şi $d \mid (5x + 4) \Rightarrow d \mid 5 \cdot (4x + 3)$ şi $d \mid 4 \cdot (5x + 4) \Rightarrow d$ divide diferenţa lor $\Rightarrow d \mid 1$ (absurd), deoarece $d \neq 1$. Rezultă că $4x + 3$ şi $5x + 4$ sunt prime între ele. **7.** Din $(a, b) = 35 \Rightarrow a = 35x$, $b = 35y$, cu $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $(x, y) = 1$. Dar $a \cdot b = 14700 \Rightarrow 35x \cdot 3y = 14700 \Rightarrow x \cdot y = 12 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, 12); (3, 4); (4, 3); (12, 1)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(35, 420); (105, 140); (140, 105); (420, 35)\}$. **8.** Din teorema împărţirii cu rest rezultă $n = 2 \cdot c_1 + 1$, $n = 3 \cdot c_2 + 1$, $n = 5 \cdot c_3 + 1 \Rightarrow n - 1 = 2 \cdot c_1$, $n - 1 = 3 \cdot c_2$, $n - 1 = 5 \cdot c_3 \Rightarrow n - 1 = [2, 3, 5] = 30 \Rightarrow n = 31$. **9.** Dimensiunile terasei sunt 4,8 m = 48 dm şi respectiv 4,2 m = 42 dm. Notăm cu x lungimea laturii unei plăci de gresie, exprimată în decimetri. Rezultă că x trebuie să fie divizor comun al numerelor 48 şi 42 şi cum numărul de plăci trebuie să fie minim, rezultă că x este c.m.m.d.c. al numerelor 48 şi 42. Adică $x = (48, 42) = 6$, lungimea laturii unei plăci de gresie fiind de 6 dm = 60 cm.

Testul 3. **1.** $\mathscr{D}_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. **2.** a) 18, 21, 54, 12, 9, 39; b) 18, 4, 12, 9. **3.** $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$. **4.** $3 \cdot 102 = 306$ şi $4 \cdot 102 = 408$. **5.** Din $n = 85 \cdot c + 51 = 17 \cdot (5 \cdot c + 3) \Rightarrow 17 \mid n$. **6.** Avem $15 \mid \overline{5a3b} \Leftrightarrow 5 \mid \overline{5a3b}$, $3 \mid \overline{5a3b}$ şi $(5, 3) = 1$. Din $5 \mid \overline{5a3b} \Rightarrow b \in \{0, 5\} \Rightarrow \overline{5a3b} \in \{\overline{5a30}, \overline{5a35}\}$. Dar $3 \mid \overline{5a30} \Rightarrow 3 \mid (5 + a + 3 + 0) \Rightarrow 3 \mid (8 + a) \Rightarrow a \in \{1, 4, 7\} \Rightarrow \overline{5a30} \in \{5130, 5430, 5730\}$ (1). Din $3 \mid \overline{5a35} \Rightarrow 3 \mid (5 + a + 3 + 5) \Rightarrow 3 \mid (13 + a) \Rightarrow a \in \{2, 5, 8\} \Rightarrow \overline{5a35} \in \{5235, 5535, 5835\}$ (2). Din (1) şi (2) avem că numerele de forma $\overline{5a3b}$ divizibile cu 15 sunt: 5130, 5430, 5730, 5235, 5535, 5835. **7.** $5a + 20b = 110 \mid :5 \Rightarrow a + 4b = 22$ (1). Cum $4b$ şi 22 sunt numere pare $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ a este număr par. Cum a este şi număr prim, rezultă $a = 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 4b = 20 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow a = 2$ şi $b = 5$. **8.** 13, 17, 19, 23 (se poate folosi Ciurul lui Eratostene sau regula prezentată la partea teoretică pentru a verifica dacă numerele sunt prime). **9.** a) Se calculează $8 + 8^2 + 8^3 = 8 \cdot (1 + 8 + 64) = 8 \cdot 73$ şi $8 \cdot 73 \vdots 73$; b) Se grupează termenii sumei câte trei şi se obţine: $(8 + 8^2 + 8^3) + 8^3(8 + 8^2 + 8^3) + \ldots + 8^{39}(8 + 8^2 + 8^3) = 8 \cdot 73 + 8^4 \cdot 73 + \ldots + 8^{40} \cdot 73 = 73 \cdot (8 + 8^4 + \ldots + 8^{40})$, care se divide cu 73.

Testul 4. **1.** $\mathscr{D}_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. **2.** a) 15, 24, 12, 6, 51; b) 4, 24, 12, 8, 6. **3.** $2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. **4.** $2 \cdot 201 = 402$; $3 \cdot 201 = 603$. **5.** Din $n = 91 \cdot c + 65$, $c \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 13 \cdot (7 \cdot c + 5) \Rightarrow 13 \mid n$. **6.** Avem că $6 \mid \overline{5a3b} \Leftrightarrow 2 \mid \overline{5a3b}$, $3 \mid \overline{5a3b}$ şi $(2, 3) = 1$. Din $2 \mid \overline{5a3b} \Rightarrow b \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow \overline{5a3b} \in \{\overline{5a30}, \overline{5a32}, \overline{5a34}, \overline{5a36}, \overline{5a38}\}$. Se foloseşte criteriul de divizibilitate cu 3 şi se obţin numerele 5130, 5430, 5730, 5232, 5532, 5832, 5034, 5334, 5634, 5934, 5136, 5436, 5736, 5238, 5538, 5838. **7.** Analog ex. 7 de la testul $3 \Rightarrow a = 2$ şi $b = 4$. **8.** Se verifică definiţia numerelor prime şi se găsesc numerele 19, 23, 29, 31. **9.** a) Se calculează $6 + 6^2 + 6^3 = 6 \cdot (1 + 6 + 6^2) = 6 \cdot 43$ şi $6 \cdot 43 \vdots 43$; b) Se grupează termenii sumei câte trei şi se obţine: $(6 + 6^2 + 6^3) + 6^3(6 + 6^2 + 6^3) + \ldots + 6^{39}(6 + 6^2 + 6^3) = 6 \cdot 43 + 6^4 \cdot 43 + \ldots + 6^{40} \cdot 43 = 43 \cdot (6 + 6^4 + \ldots + 6^{40})$, care se divide cu 43.

Testul 5. **1.** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. **2.** 28. **3.** a) 2; b) 0; c) 9. **4.** ultima cifră este 2 şi deci nu poate fi pătrat perfect. **5.** 4122, 4221, 4023, 4329, 4923, 4428, 4824, 4527, 4626. **6.** $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{2, 5, 8\}$, $B \setminus (A \cap C) = \{0, 1\}$. **7.** 7020, 7120, …, 7920. **8.** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$ şi $2 \cdot 3^5 \cdot 5 = 2430$. **9.** $(2 \cdot 3^n, 4 \cdot 5^n) = 2 \neq 1$.

Testul 6. **1.** $(a, b) \in \{(7, 28); (28, 7); (14, 21); (21, 14)\}$. **2.** 33. **3.** $x \in \{0, 6\}$. **4.** 720, 765. **5.** a) 34; b) 111. **6.** a) $x \in \{1, 4, 7\}$; b) $x \in \{0, 5\}$; c) $x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; d) $x \in \{2, 6\}$; e) $x \in \{1\}$. **7.** Fie x, $x + 1$ şi $x + 2$ numerele consecutive; a) demonstrăm că $x(x + 1)(x + 2) \vdots 6 \Leftrightarrow$ a) $x(x + 1)(x + 2) \vdots 2$ şi b) $x(x + 1)(x + 2) \vdots 3$. Fie $x = 2n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n(2n + 1)(2n + 2) \vdots 2$. Fie $x = 2n + 1 \Rightarrow (2n + 1)(2n + 2) \cdot (2n + 3) = 2 \cdot (2n + 1)(n + 1)(2n + 3) \vdots 2$. Fie $x = 3n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 3n(3n + 1)(3n + 2) \vdots 3$. Fie $x = 3n + 1 \Rightarrow (3n + 1)(3n + 2)(3n + 3) = 3 \cdot (3n + 1)(3n + 2)(n + 1) \vdots 3$. Fie $x = 3n + 2 \Rightarrow (3n + 2)(3n + 3) \cdot (3n + 4) = 3 \cdot (3n + 2)(n + 1)(3n + 4) \vdots 3 \Rightarrow$ pentru orice $x \in \mathbb{N}$ produsul $x(x + 1)(x + 2) \vdots 6$. **8.** a) 5412, 31436, 84300, 49372; b) 7425; c) 7425, 84300. **9.** $10^n + \overline{xy} \vdots 9 \Leftrightarrow (1 + x + y) \vdots 9 \Leftrightarrow x + y \in \{8, 17\}$.

x	8	7	1	2	6	5	3	4	8	9
y	0	1	7	6	2	3	5	4	9	8

Testul 7. 1. (12, 180); (36, 60); (60, 36); (180, 12). **2.** 923. **3.** 2, 2, 2. **4.** a) 5; b) 9. **5.** a) $x + 2 \in \{1, 3, 5, 15\} \Rightarrow x \in \{1, 3, 13\}$; b) $2x - 1 \in \{1, 17\} \Rightarrow 2x \in \{2, 18\} \Rightarrow x \in \{1, 9\}$. **6.** a) 2, 3, 4, 6; b) 2, 3, 6, 9; c) nu are. **7.** $\overline{x5y} \in \{252, 552, 852, 156, 456, 756\}$. **8.** $2^8 \cdot 7^5(2^3 + 1) = 2^8 \cdot 7^5 \cdot 9 \vdots 9$ (A). **9.** $A = \{320, 322, 324, 326, 328\}$, $B = \{320, 324, 328\}$, $A \cup B = \{320, 322, 324, 326, 328\}$, $A \cap B = \{320, 324, 328\}$, $A - B = \{322, 326\}$ şi $B - A = \varnothing$.

Probleme pentru pregătirea concursurilor şcolare

1. Orice număr natural face parte din una dintre mulţimile disjuncte $6\mathbb{N}$, $6\mathbb{N} + 1$, $6\mathbb{N} + 2$, $6\mathbb{N} + 3$, $6\mathbb{N} + 4$, $6\mathbb{N} + 5$. Din condiţiile problemei, 2 numere sunt în $6\mathbb{N} + 1$ şi 2 numere în $6\mathbb{N} + 5$. Fie $a, b \in 6\mathbb{N} + 1$ şi $c, d \in 6\mathbb{N} + 5$. Imediat $A = 6n \cdot 4 \cdot 6n \cdot 4 = 24 \cdot 24 = 576$. **3.** Din $a + 2$, $a + 4$, $a + 8$, $a + 10$, $a + 16$ simultan prime găsim $a = 3$. Acest lucru îl găsim alegând $a = 5p$, $5p + 2$, $5p + 3$, $5p + 4$. Numărul x se rescrie sub forma $x = 5 + 7 - 2$, pentru orice n număr natural. Mai departe arătăm că $u(x) = 0$, pentru fiecare din situaţiile lui n: $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$. **4.** Deoarece $x = abc + 1$ prim, găsim x impar, căci dacă $x = 2$, găsim $y = abc - 1 = 0$, ori 0 nu este prim. Urmează că x este impar. Atunci abc este obligatoriu par. Unul dintre numerele abc este obligatoriu 2. Analizăm următoarele situaţii (în continuare luăm $a = 2$): (i) $b = 3$, $c = 5$; $abc = 30$, de unde $x = 31$, $y = 29$ numere prime. O soluţie este deci $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$; (ii) $b = 3$, $c = 7$; $abc = 42$, de unde $x = 43$, $y = 41$ numere prime. O altă soluţie este $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$. *Observaţie.* Analiza se face astfel: în şirul numerelor prime se iau termeni consecutivi de pas 2 şi apoi se încearcă dacă există numere prime cu condiţia dată. Vom indica tripletele de soluţii: (2, 3, 5); (2, 3, 7); (2, 3, 17). **5.** Vom arăta că numărul nostru se divide cu 3, dar nu se divide cu 9, ceea ce arată că nu este pătrat perfect. Notăm $N = 10^{20} + 3 \cdot 10^{10} - 1$. Atunci $N = 1\underbrace{00...0}_{9\text{ zerouri}}3\underbrace{00...0}_{10\text{ zerouri}} - 1 = 1\underbrace{00...0}_{9\text{ zerouri}}2\underbrace{99...9}_{9\text{ ori}}$, ceea ce confirmă afirmaţia: suma cifrelor lui N este multiplu de 3, dar nu este multiplu de 9, ceea ce arată că nu este pătrat perfect. **7.** a) $n = 11$, se obţin 11, 13, 17; $n = 5$, se obţin 5, 7, 11; $n = 17$, se obţin 17, 19, 23; b) Dacă alegem n de forma $n = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, găsim $S = 3k - 1 + 3k + 1 + 3k + 5 = 9k + 5$, $k \in \mathbb{N}^*$; c) Din b) avem imediat că restul împărţirii lui S la 18 este 5. **8.** Rezolvare clasică prin metoda reducerii la absurd: Presupunem că există $d \neq 1$, $d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d \mid a$ şi $d \mid b$ (1). În final, vom arăta că ipoteza (1) conduce la $d = 1$, absurd, căci am presupus $d \neq 1$. Ca urmare $(a, b) = 1$. Într-adevăr, fie $d \mid 2 \cdot 10^n + 3$ şi $d \mid 5 \cdot 10^n + 7$, de unde $d \mid 1$, adică $d = 1$. **9.** Condiţia $n + 8(m + 1) = m(n + 1)$ se transcrie astfel: $(m - 1)(n - 1) = 15$, de unde $(m, n) \in \{(2, 16); (4, 6); (6, 4); (12, 2)\}$. Ţinând cont şi de condiţia suplimentară $(n + m, n^2 + 2n)$ maxim, găsim că $m = 2$, $n = 16$, cu 18 cel mai mare divizor comun.

CAPITOLUL III. OPERAŢII CU NUMERE RAŢIONALE POZITIVE

1. Fracţii echivalente; fracţii ireductibile

1. a) $\frac{15}{16}$; b) $4 = \frac{16}{16}$; c) se haşurează 4 pătrăţele. **2.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{3}$; c) au aceeaşi lungime. **3.** 5 cm. **4.** a) $x = 21$; b) $x = 20$; c) $x = 9$; d) 4. **5.** a) $\frac{36}{60}$; b) $\frac{54}{90}$; c) $\frac{9}{15}$; d) $\frac{6}{10}$. **6.** a) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$. **8.** $\frac{a}{b} = \frac{4}{6}$. **9.** $\frac{a}{b} = \frac{33}{44}$. **10.** $\frac{a}{b} = \frac{42}{30}$. **11.** $x = 2$. **12.** $\frac{3}{6}, \frac{11}{22}, \frac{33}{66}$. **13.** $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}$. **14.** a) $\frac{5}{13} = \frac{10}{26} = \frac{15}{65}$; b) $\frac{44}{177} = \frac{132}{531} = \frac{220}{885}$; c) $\frac{3}{71} = \frac{24}{568} = \frac{15}{355}$. **15.** a) $\frac{20}{70}$; b) $\frac{22}{74}$; c) $\frac{82}{46}$; d) $\frac{38}{82}$; e) $\frac{24}{10}$. **16.** a) $x = 12$; b) $x = 105$; c) $x = 4$; d) $x = 9$. **17.** Nu obligatoriu. Poate fi, de exemplu, $a = 10$, $b = 20$. **18.** $x = 45$. **19.** $3a = 2b \mid \cdot 17 \Rightarrow 51a = 34b$. **20.** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$ şi cum $c \cdot y = d \cdot x \Rightarrow a \cdot d \cdot c \cdot y = b \cdot c \cdot d \cdot x \mid : (c \cdot d) \Rightarrow a \cdot y = b \cdot x$. **21.** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Cum $a \cdot y = b \cdot x \Rightarrow a \cdot d + a \cdot y = b \cdot c + b \cdot x \Rightarrow a \cdot (d + y) = b \cdot (c + x) \Rightarrow \frac{a}{c+x} = \frac{b}{d+y}$. **22.** $x = 1$; $y = 5$; $x = 6$; $y = 0$; $x = 2$; $y = 2$; $x = 3$; $y = 1$. **23.** $x = 2$. **24.** $A = \{22, 26, 34, 38\}$, $A = \left\{\frac{119}{114}, \frac{119}{144}, \frac{119}{174}\right\}$. **25.** a) $y = 2$, $x = 6$; b) $y = 3$, $x = 5$; c) $y = 3$, $x = 9$. **26.** $x = 3$; $y = 7$. **27.** $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{25}{33}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$. **28.** a) $x = 2$, $y = 4$; b) $y = 5$, $x = 9$; c) $y = 7$; $x = 33$. **29.** $x = 16$; $y = 3$. **30.** a) $\frac{375}{871}$; b) $\frac{a+b+c}{x+y+z}$; c) $\frac{\overline{ab}}{17}$. **31.** Indicaţie: $\overline{1a7b} \vdots 36$ şi $\overline{c51d} \vdots 36$. **33.** Notăm $(n; n + 1) = d \Rightarrow d \mid n + 1$ şi $d \mid n \Rightarrow d \mid (n + 1 - n) \Rightarrow d \mid 1$. Cum $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (n; n + 1) = 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1}$ este ireductibilă. **34.** Analog 33. **35.** Analog 33. **36.** $\frac{x^2 + x}{2x + 4} = \frac{x(x+1)}{2(x+2)}$. Cum x şi $x + 1$ sunt numere naturale consecutive, rezultă că produsul lor este număr par şi cum $2(x + 2) \vdots 2 \Rightarrow \frac{x(x+1)}{2(x+2)}$ se simplifică prin 2, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$. **37.** Se notează cu p numerele pare şi cu i numerele impare:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$	$ab(a + b)$
p	p	p	p	p
p	i	p	i	p
i	p	p	i	p
i	i	i	p	p

39. Notăm $d = (n + 4; n + 6) \Rightarrow d \mid (n + 6)$ şi $d \mid (n + 4) \Rightarrow d \mid (n + 6 - n - 4) \Rightarrow d \mid 2$ şi cum $d \neq 1 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow n + 4 \vdots 2 \Rightarrow n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Aducerea fracţiilor la acelaşi numitor

1. Se amplifică fracţiile cu: 48; 120; 80; 72; 8; 16; 18; 4; 36; 2. **2.** a) $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $28 = 2^2 \cdot 7$; $56 = 7 \cdot 2^3$; $72 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; b) c.m.m.m.c. este $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$ şi $504 : 36 = 14$; $504 : 28 = 18$; $504 : 56 = 9$; $504 : 42 = 12$. Se amplifică fracţiile şi se obţin $\frac{14}{504}; \frac{162}{504}; \frac{36}{504}; \frac{210}{504}$. **3.** a) $\frac{24}{40}$ şi $\frac{35}{40}$; b) $\frac{15}{48}$ şi $\frac{22}{48}$; c) $\frac{7}{126}$ şi $\frac{10}{126}$; d) $\frac{35}{55}$ şi $\frac{8}{55}$. **4.** a) $\frac{5}{15}$ şi $\frac{3}{15}$; b) $\frac{2}{4}$ şi $\frac{3}{4}$; c) $\frac{32}{36}$ şi $\frac{27}{36}$; d) $\frac{15}{5}$ şi $\frac{2}{5}$; e) $\frac{6}{25}$ şi $\frac{35}{25}$; f) $\frac{12}{36}$ şi $\frac{21}{36}$; g) $\frac{105}{75}$ şi $\frac{17}{75}$; h) $\frac{15}{180}$ şi $\frac{12}{180}$; i) $\frac{4}{180}$ şi $\frac{27}{180}$; j) $\frac{63}{882}$ şi $\frac{14}{882}$. **5.** a) $\frac{40}{96}; \frac{1}{96}; \frac{14}{96}$; b) $\frac{51}{768}; \frac{12}{768}; \frac{80}{768}$; c) $\frac{432}{441000}; \frac{468}{441000}; \frac{1225}{441000}$; d) $\frac{18a}{450}; \frac{3b}{450}; \frac{10c}{450}$; e) $\frac{345}{2700}; \frac{50}{2700}; \frac{28}{2700}$; f) $\frac{12}{2620}; \frac{7}{2620}; \frac{2}{2620}$. **6.** a) $\frac{5}{2}$ şi $\frac{7}{2}$; b) $\frac{27}{34}$ şi $\frac{187}{34}$; c) $\frac{3}{4}$ şi $\frac{5}{4}$; d) 991;

e) 1092; f) 135. **7.** a), b), c). **8.** a) $x = 8$; b) $x = 21$; c) $x = 2$; d) $x = 25$; e) $x = 1$. **9.** a) $\frac{10a}{6}; \frac{21a}{6}; \frac{14a}{6}$; b) $\frac{10b}{50}; \frac{30b}{50}; \frac{7b}{50}$; c) $\frac{18}{12c}; \frac{20}{12c}; \frac{21}{12c}$; d) $\frac{2}{2n}; \frac{1}{2n}$; e) $\frac{n+1}{2^2 \cdot n \cdot (n+1)}; \frac{2n}{2^2 \cdot n \cdot (n+1)}$; f) $\frac{4(n+1)}{2^2 \cdot 3 \cdot n \cdot (n+1)}$; $\frac{3n}{2^2 \cdot 3 \cdot n \cdot (n+1)}$. **10.** a) 60 părți; b) prima zi.

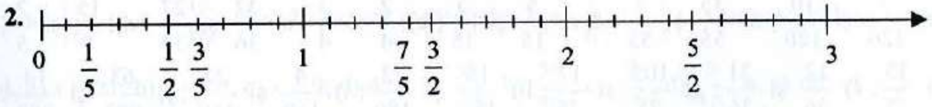
3. Noțiunea de număr rațional; forme de scriere a unui număr rațional; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

1. a) 0,1; b) 0,03; c) 0,007; d) 0,0009; e) 0,00011; f) 0,000017. **2.** a) 1,7; b) 10,34; c) 0,0017; d) 10,0009; e) 0,0054. **3.** a) 2,8(3); b) 1,58(3); c) 2,3(8); d) 17,5(3); e) 0,58(3); f) 9,791(6); g) 1,9(4); h) 1,902(7); i) 27,91(6); j) 4,8(3). **5.** a) $\frac{66}{5}$; b) $\frac{249}{100}$; c) $\frac{7}{4}$; d) $\frac{11003}{1000}$; e) $\frac{7401}{2500}$; f) $\frac{57}{10}$; g) $\frac{423}{100}$; h) $\frac{49}{8}$; i) $\frac{1401}{200}$; j) $\frac{77}{8}$. **6.** a) $x \in \{0, 1, 4\}$; b) $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 4\}$. **7.** a) $-\frac{2}{5}$; b) $-5{,}24$; c) $-1{,}(03)$; d) $-2{,}1(3)$. **8.** a) $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{5}; -\frac{3}{10}$; b) $-1{,}3$; $-2{,}5$; $-0{,}4$; c) $-1(3)$; $-0{,}(1)$; $-2{,}(4)$; d) $-0{,}1(3)$; $-2{,}3(1)$; $-1{,}2(3)$. **9.** $\frac{7}{5}; \frac{5}{11}; 3; \frac{45}{4}$. **10.** a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{9}{18} = 0{,}5$; b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = 0{,}(3)$; c) $\frac{32}{15} = \frac{64}{30} = \frac{96}{45} = \frac{128}{60} = \frac{160}{75} = 2{,}1(3)$. **11.** $5\frac{5}{9}$; $7\frac{4}{9}$; $\frac{23}{99}$; $\frac{40}{99}$; $12\frac{7}{333}$; $\frac{235}{999}$. **12.** a) $\frac{7}{10}, \frac{1}{2}$ (fracțiile ireductibile care au la numitor numai puteri ale lui 2 și 5); b) $\frac{17}{9}; \frac{131}{3}; \frac{84}{33}$; c) $\frac{16}{15}; \frac{263}{15}; \frac{7}{12}$. **13.** $3\frac{11}{45}$; $5\frac{16}{45}$; $4\frac{149}{165}$; $3\frac{4}{165}$; $\frac{617}{4995}$; $3\frac{161}{666}$. **14.** $\overline{0{,}0000abcd}$. **15.** a) $\frac{\overline{xyz} - \overline{xy}}{9} = \frac{9\overline{xy} + z}{9} = \overline{xy}\frac{z}{9}$; b) $\frac{\overline{xyz}}{100}$; c) $\overline{xy}\frac{\overline{zt}}{99}$; d) $x\frac{\overline{yz} - y}{90}$. **16.** a) $n = 270$; b) $n = 3$; c) $n = 12$. **17.** a) 2,(37). **18.** 230. **19.** 3. **20.** a) $a = 3$; b) $a = 0$; c) $a = 2$; d) $a = 5$; e) $a = 2$. **21.** b) și c) analog a). **23.** De exemplu 2,131331331333... Demonstrație analog 17. **24.** Folosim faptul că o fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$ se transformă în fracție zecimală mixtă dacă numitorul său are pe lângă alți factori și cel puțin unul dintre factorii 2 și 5. Or, fracția noastră are pe 2 la numitor căci $n(n + 1)$ este par. Cum numitorul este multiplu și de 3 (produsul a trei factori consecutivi), avem concluzia.

4. Ordonarea numerelor raționale pozitive. Aproximări și rotunjiri

1. a) $A\left(\frac{3}{10}\right)$; $B\left(1\frac{1}{10}\right)$; $C\left(1\frac{7}{10}\right)$; $D\left(2\frac{2}{10}\right)$; b) $A(0{,}3)$; $B(1{,}1)$; $C(1{,}7)$; $D(2{,}2)$.

2.



4. 0,201; 0,21; 0,2(10); 0,2(1); 0,(21). **5.** 0,09; 0,1; 0,8; 1,052; 1,1(09); 10,52; 12,(1); 25,08; 25,2. **6.** 5 respectiv 6; 7,1 respectiv 7,2; 7,13 respectiv 7,14; 7,133 respectiv 7,134. **7.** 5 respectiv 4; 7,1 respectiv 3,8; 13,27 respectiv 3,76; 13,244 respectiv 5,486. **8.** a) 41,371; 41,373; 41,375; b) 0,01; 0,011; 0,0112; c) 7,01; 7,83; 7,91; d) 14,361; 14,367; 14,369; e) 4,61; 4,7; 4,83. **9.** $1{,}1 < 1{,}(1) < 1{,}125 < 1{,}(142857) < 1{,}1(6) < 1{,}2 < 1{,}25 < 1{,}(3) < 1{,}5 < 2$. **10.** 0,(63); 0,(42); 0,1(36); 0,(523809); 0,(285714); 0,(307692); 0,0(5); 1,9(285714); a) 0,63; 0,42; 0,13; 0,52; 0,28; 0,30; 0,05; 1,92; b) 0,64; 0,43; 0,14; 0,53; 0,29; 0,31; 0,06; 1,93; c) 0,6; 0,4; 0,1; 0,5; 0,3; 0,3; 0,1; 1,9. **12.** a) Din

$\frac{m}{p} < \frac{m}{q} \Leftrightarrow mq < pm \mid : m \Leftrightarrow q < p$; b) 1) $\frac{1}{49} < \frac{1}{25} < \frac{1}{17} < \frac{1}{13}$; 2) $\frac{11}{20} < \frac{11}{19} < \frac{11}{15} < \frac{11}{12}$. **13.** a) Din $\frac{p}{n} < \frac{q}{n} \Leftrightarrow p \cdot n < q \cdot n \mid : n \neq 0 \Leftrightarrow p < q$; b) 1) $\frac{3}{5}; \frac{11}{5}; \frac{17}{5}; \frac{19}{5}$. 2) $^{6)}\frac{27}{2} = \frac{162}{12}$; $^{2)}\frac{55}{6} = \frac{110}{12}$; $^{4)}\frac{25}{3} = \frac{100}{12}$; $^{3)}\frac{13}{4} = \frac{39}{12}$. Cum $\frac{39}{12} < \frac{100}{12} < \frac{110}{12} < \frac{162}{12} \Rightarrow \frac{13}{4} < \frac{25}{3} < \frac{55}{6} < \frac{27}{2}$. **14.** a) $\frac{30}{36} < \frac{31}{36}$; b) $\frac{155}{186} < \frac{155}{180}$; c) $5 \cdot 36 < 31 \cdot 6$; d) $0{,}8(3) < 0{,}86(1)$; f) se hașurează și se observă. **15.** $\left[\frac{3}{5}\right] = 0$; $\left\{\frac{3}{5}\right\} = 0{,}6$; $\left[\frac{7}{2}\right] = 3$; $\left\{\frac{7}{2}\right\} = 0{,}5$; $[2{,}1(6)] = 2$; $\{2{,}1(6)\} = 0{,}1(6)$; $[1{,}3(6)] = 1$; $\{1{,}3(6)\} = 0{,}3(6)$; $[12{,}35] = 12$; $\{12{,}35\} = 0{,}35$. **16.** $(x, y) \in \{(4, 2); (4, 1); (5, 2); (5, 1); (6, 1)\}$. **17.** a) 3; b) 9; c) 1; d) 1; e) 68; f) 5; g) 25; h) 13; i) 5; j) 7. **21.** a) Se aduce la același numitor; b) $\ldots \frac{6}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}$; d) Dacă ar exista $\overline{a{,}b}$ astfel încât $\frac{11}{10} < \overline{a{,}b} < \frac{10}{9}$, adică $1{,}1 < \overline{a{,}b} < 1{,}(1)$ și cum $1{,}(1) < 1{,}2 \Rightarrow 1{,}1 < \overline{a{,}b} < 1{,}2 \mid \cdot 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 11 < \overline{ab} < 12$ (absurd); e) Cum $\frac{11}{10} < \overline{a{,}bc} < \frac{10}{9} \Rightarrow 1{,}1 < \overline{a{,}bc} < 1{,}(1)$ și $1{,}(1) < 1{,}12 \Rightarrow 1{,}10 < \overline{a{,}bc} < 1{,}12 \mid \cdot 100 \Rightarrow 110 < \overline{abc} < 112 \Rightarrow \overline{abc} = 111$ și $\overline{a{,}bc} = 1{,}11$. **22.** $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} \in \left\{\frac{10}{81}, \frac{10}{82}; \ldots; \frac{10}{89}; \frac{11}{89}; \frac{11}{90}; \ldots; \frac{11}{98}; \frac{12}{97}; \frac{12}{98}; \frac{12}{99}\right\}$. **23.** $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$; b) $x = 5$; c) $x \in \mathbb{N}, x > 5$; d) $x \in \{3, 4\}$.

5. Adunarea și scăderea numerelor raționale pozitive

1. a) 0,(72); b) 2; c) 1,5; d) $\frac{22}{31}$; e) 1,875; f) 5; g) 1,8; h) 0,(142857); i) 0,4; j) 0,(6); k) 0,(2); l) 0,(3); m) 1,(3); n) 0,0(2). **2.** a) 1,75; b) 0,(539682); c) 0,541(6); d) 0,486(1); e) 1,291(6); f) 1,1(6); g) 3,65; h) 2,18(93); i) 0,0(571428); j) 0,07(2); k) 0,(487179); l) 2,6. **3.** a) 11,735; b) 618,22; c) 0,0365; d) 43,098; e) 25,025; f) 154,9. **4.** a) 0,(7); b) 9,(46); c) 5,5(6); d) 2,(7); e) 1,(87); f) 8,7(1). **5.** a) 1,4447(2); b) 0,73(8). **6.** a) $2\frac{3}{4}$; b) $2\frac{2}{3}$; c) $1\frac{3}{8}$; d) $1\frac{2}{3}$; e) $2\frac{1}{2}$; f) $3\frac{3}{5}$; g) $1\frac{6}{7}$; h) 4; i) $4\frac{2}{21}$; j) $7\frac{4}{17}$; k) $7\frac{68}{81}$; l) $149\frac{6}{29}$. **7.** a) $\frac{17}{5}$; b) $\frac{11}{7}$; c) $\frac{19}{6}$; d) $\frac{256}{15}$; e) $\frac{684}{23}$; f) $\frac{131}{16}$. **8.** a) 11,35; b) 13,08(3); c) 2,58(3); d) 2,8(3); e) 1,(3); f) 4,7(2); g) 2,(7). **9.** a) $\left[3\frac{2}{7}\right] = 3$ și $\left\{3\frac{2}{7}\right\} = 0{,}(285714)$; b) $\left[5\frac{1}{3}\right] = 5$ și $\left\{5\frac{1}{3}\right\} = 0{,}(3)$; c) $\left[14\frac{15}{7}\right] = 16$ și $\left\{14\frac{15}{7}\right\} = 0{,}142857$; d) $\left[13\frac{97}{150}\right] = 13$ și $\left\{13\frac{97}{150}\right\} = 0{,}64(6)$; e) $\left[11\frac{133}{49}\right] = \left[13\frac{35}{49}\right] = \left[13\frac{5}{7}\right] = 13$ și $\left\{13\frac{5}{7}\right\} = 0{,}(714285)$; f) $\left[2\frac{0}{8}\right] = 2$ și $\left\{2\frac{0}{8}\right\} = 0$; g) $[2{,}14] = 2$ și $\{2{,}14\} = 0{,}14$; h) $[2{,}3(14)] = 2$ și $\{2{,}3(14)\} = 0{,}3(14)$; i) $[9{,}(3)] = 9$ și $\{9{,}(3)\} = 0{,}(3)$; j) $\left[\frac{15}{7}\right] = \left[2\frac{1}{7}\right] = 2$ și $\left\{2\frac{1}{7}\right\} = 0{,}(142857)$; k) $\frac{239}{15} = 15{,}9(3)$; $[15{,}9(3)] = 15$ și $\{15{,}9(3)\} = 0{,}9(3)$.

10.

a	b	c	$a+b$	$b+c$	$(a+b)+c$	$a+(b+c)$	$a+b+c$
$\frac{3}{24}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{19}{72}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{35}{72}$
$\frac{2}{21}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{7}$	$3\frac{3}{7}$	$4\frac{3}{21}$	$7\frac{4}{7}$	$7\frac{4}{7}$	$7\frac{4}{7}$

11. a) $\frac{38}{441}$; b) $\frac{83}{5929}$; c) $\frac{17}{1000}$; d) $\frac{3}{50}$. **12.** $\frac{29}{16}$. **13.** a) 0,99(4); b) 4; c) 1. **14.** $a = \frac{29}{20}$, $b = \frac{38}{21}$. **15.** a) $\frac{364}{729}$; b) $\frac{63}{64}$. **16.** a) 0,9(814); b) 0,79(4); c) 0,58(6). **17.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{133}{180}$; c) $\frac{1667}{1200}$. **18.** a) $7\frac{3}{4}+2\frac{1}{4} = (7 + 2) + \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right) = 9 + 1 = 10$; b) $5\frac{2}{9}+13\frac{7}{9}=(5+13)+\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{9}\right) = 18 + 1 = 19$; c) 131; d) 20,(3); f) 3,3(461538); g) 6,2. **19.** Folosind proprietăţile de asociativitate şi comutativitate se obţine 0,3(48). **20.** 1,2(142857). **21.** a) 3; b) asociativitate. **22.** a) asociativitate şi comutativitate. **23.** a) $3\frac{57}{70}$; b) $51\frac{6}{13}$. **24.** a) $2\frac{97}{120}$; b) $15\frac{1}{10}$. **25.** $63\frac{9}{14}$. **26.** a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{7}{10}$; c) $\frac{3}{19}$.

27. a) $7\frac{4}{5}$; b) 21; c) 9; d) 3; e) 13; f) 12. **28.** Se calculează $a + b$ şi $b + a$, apoi se compară rezultatele obţinute. **29.** a) 35; b) 48; c) 2,48(904761); d) 0,(4455). **30.** a) $\frac{(7+23)+15}{17}=\frac{45}{17}=2\frac{11}{17}$; b) $\frac{(19+1)+(13+7)}{29}=\frac{40}{29}=1\frac{11}{29}$; c) $\frac{1+2+3+...+9}{103}=\frac{9\cdot 10}{103}=\frac{90}{103}$; d) $\frac{5+25}{13}+\frac{4+16}{26}=\frac{20}{13}+\frac{20}{26}=\frac{60}{26}=\frac{30}{13}=2\frac{4}{13}$. **31.** 58 kg. **32.** 0,65. **33.** 1. **34.** 171 km. **35.** A doua zi s-a recoltat $\frac{26}{78}+\frac{19}{57}$, iar în total $\frac{26}{78}+\frac{19}{57}=\frac{26}{39}+\frac{1}{3}=\frac{26+13}{39}=\frac{39}{39}=1$. Deci s-a terminat recoltatul. **36.** $\frac{1}{2}$ = 0,5 din total. **37.** $\frac{8}{27}$. **38.** a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{13}{36}$; c) $35\frac{4}{9}$; d) $\frac{2}{5}$. **39.** a) $6\frac{1}{4}$; b) $5\frac{5}{12}$; c) $11\frac{7}{16}$; d) $3\frac{13}{30}$; e) $17\frac{7}{20}$; f) $9\frac{1}{3}$. **40.** 38 ℓ. **41.** a) $\frac{9}{35}$; b) $\frac{19}{56}$; c) $\frac{41}{323}$. **42.** a) Într-o oră primul efectuează $\frac{1}{24}$ din lucrare, al doilea $\frac{1}{40}$ din lucrare, iar al treilea $\frac{1}{15}$ din lucrare; b) Într-o oră, cei trei muncitori împreună efectuează $\frac{2}{15}$ din lucrare; c) 7 ore şi 30 de minute. **43.** $\frac{1}{9}+\frac{1}{84}+\frac{1}{15}=\frac{140+15+84}{1260}=\frac{239}{1260}$. Da, deoarece $8 \cdot \frac{239}{1260} > 1$. **44.** $\frac{44}{13}$. **45.** a) $\frac{n+11}{n+1}=\frac{(n+1)+10}{n+1}=1+\frac{10}{n+1}$ şi $\frac{10}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n + 1 \in \{1, 2, 5, 10\} \Rightarrow n \in \{0, 1, 4, 9\}$; b) Analog a) şi se obţine $n \in \{0, 3\}$; c) $n \in \varnothing$. **46.** a) Se efectuează calculele în membrul stâng şi se obţine membrul drept; b) Se foloseşte formula de la a) şi se obţine $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}=0{,}99$; c) Se observă că $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 4}$;...; $\frac{1}{99^2}<\frac{1}{98\cdot 99}$ şi însumând se obţine că $S<\frac{98}{99}< 1$. **47.** $x = 2, y = 1, z = 3, t = 4$. **48.** $a = 4$; $b = 2$; $c = 1$; $d = 4$. **50.** a) Cum $\frac{1}{200}<\frac{1}{101}$, $\frac{1}{200}<\frac{1}{102}$, ..., $\frac{1}{200}\leq\frac{1}{200}$, însumându-le se obţine $\frac{1}{200}\cdot 100 < \frac{1}{101}+\frac{1}{102}+ ... + \frac{1}{200} \Rightarrow \frac{1}{2}\leq\frac{1}{101}+\frac{1}{102} + ... + \frac{1}{200}$ (1). Cum $\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$, $\frac{1}{102}<\frac{1}{100}$, ..., $\frac{1}{200}<\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{101}+\frac{1}{102} + ... + \frac{1}{200}<100\cdot\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{101}+\frac{1}{102} + ... + \frac{1}{200}<1$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{1}{2}\leq\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + ... + \frac{1}{200}<1$; b) analog a). **51.** a) Cum $n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n \Rightarrow n^2 + n + n + 1 < n(n + 2) \Rightarrow n(n + 1) + (n + 1) < n(n + 2) \Rightarrow (n + 1)(n + 1) < n(n + 2) \Rightarrow \frac{n+1}{n}<\frac{n+2}{n+1}$; b) Suma $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+...+\frac{101}{100}$ are 99 de termeni şi fiecare termen este mai mic decât $\frac{3}{2}$ şi mai mare decât $\frac{101}{100} \Rightarrow 99 \cdot \frac{101}{100}< S<99\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow 99 \cdot 1{,}01 < S < 99 \cdot 1{,}5 \Rightarrow 99{,}99 < S < 1{,}5 \cdot 99$. **52.** a) $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{k}\left(\frac{n+k-n}{n(n+k)}\right)=\frac{1}{n(n+k)}$; b) $S=\frac{671}{2014}$.

6. Înmulţirea numerelor raţionale pozitive

1. a) $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}=1{,}2$; b) 1,2; c) 2,8; d) 2,8; e) 4,5; f) 4,5; g) 5,6; i) 0,58(3). **2.** a) $3\cdot\frac{1}{3}=1$; b) $4\cdot\frac{7}{13}=\frac{28}{13}=2\frac{2}{13}=$ 2,(153846); c) $5\cdot\frac{3}{16}=\frac{15}{16}=0{,}9375$; d) $10\cdot\frac{1}{5}=2$; e) $50\cdot\frac{1}{10}=5$; f) $100\cdot\frac{5}{23}=\frac{500}{23}= 21\frac{17}{23}$. **3.** a) $2 \cdot \frac{3}{7}=\frac{6}{7}$ şi $2\frac{3}{7}=\frac{17}{7}$; b) $\frac{1}{2}$ şi $\frac{33}{8}$; c) $\frac{2}{3}$ şi $\frac{29}{9}$; d) $\frac{5}{4}$ şi $\frac{21}{4}$; e) $\frac{7}{4}$ şi $\frac{29}{4}$; f) 10 şi $\frac{77}{6}$. **4.** a) $\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$; b) $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$; c) 4; d) $\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$; e) $\frac{3}{5}$; f) $\frac{6}{35}$; g) $\frac{1}{15}$; h) $\frac{11}{10}$; i) $\frac{34}{3}=11\frac{1}{3}$; j) 1; k) $\frac{10}{21}$; l) $\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$. **5.** a) 3,5; b) 472; c) 1290; d) 17 000; e) 40 000; f) 31 473 000; g) 35 000 000; h) 804 000 000. **6.** a) 1 zecimală; b) 3 zecimale; c) 2 zecimale; d) 5 zecimale; e) 4 zecimale; f) 7 zecimale. **7.** a) 4 zecimale; 9,4044; b) 3 zecimale; 2,505. **8.** a) 5,12; b) 3,284; c) 14,72; d) 7,696; e) 1,365; f) 1,255; g) 13,55343; h) 14,2296; i) 16,3194. **9.** a) $\frac{21}{25}$; b) $\frac{2}{1}$; c) $\frac{4}{1}$; d) $\frac{494}{27}$; e) $\frac{1}{1}$; f) $\frac{1}{1}$. **10.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{4}{35}$; e) $\frac{4}{35}$; f) $\frac{4}{35}$. **11.** a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$; c) $\frac{42}{11}=3\frac{9}{11}$. **12.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{42}$. **13.** a) $\frac{27}{28}$; b) $\frac{6}{11}$ şi 0; c) $1\frac{41}{120}, 2\frac{49}{120}, 2\frac{61}{120}$.

14. a) $63\frac{4}{5}$; b) $18\frac{15}{16}$; c) 7; d) $\frac{3}{19}$; e) $\frac{3}{115}$; f) $1\frac{4}{11}$. **15.** $50\frac{1}{2}$. **16.** $\frac{1}{21}$. **17.** a) 5; b) $\frac{1}{2}$; c) 3; d) 5. **18.** a) 3; b) 1; c) 6. **19.** 224; 510. **20.** a) 2709 kg şi respectiv 903 kg; b) 4063,50 lei. **22.** Notăm $S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n \Rightarrow a \cdot S = a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1} \Rightarrow aS - S = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S \cdot (a-1) = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{n+1}-1}{n-1}$. **23.** Din $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$. **24.** $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot...\cdot\frac{1001}{1000}=\frac{1001}{2}=500\frac{1}{2}$. **25.** $A = 2013^2$.

7. Împărţirea numerelor raţionale pozitive

1. a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}=7$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$; $3^{-1}=\frac{1}{3}$; $1{,}2^{-1}=\left(\frac{12}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{6}$; $0{,}(2)=\left(\frac{2}{9}\right)^{-1}=\frac{9}{2}$; $\frac{1}{5}$; 3; $\frac{7}{2}$; 3; $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{7}$. **2.** a) $\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}=1{,}2$; b) $\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}=6{,}(6)$; c) 16; d) $\frac{4}{7}$; e) $\frac{5}{12}$; g) $\frac{4}{21}$; h) $\frac{1}{9}$; i) $\frac{7}{4}$. **3.** a) $\frac{10}{33}$; b) $\frac{5}{28}$; c) $\frac{5}{14}$; d) $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}=1{,}5$; e) $\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}=3{,}(3)$; f) $\frac{3}{14}$; g) $\frac{33}{8}=4\frac{1}{8}=4{,}125$; h) $\frac{22}{41}$. **4.** a) 3,25; b) 1,7225; c) 0,0051; d) 0,00976; e) 0,0003251; f) 0,009378. **5.** a) 5; b) $7{,}25:0{,}01=7{,}25:\frac{1}{100}=7{,}25\cdot 100=725$; c) $0{,}935:0{,}001=0{,}935:\frac{1}{1000}=0{,}935\cdot 1000=935$; d) $1{,}325:0{,}0001=1{,}325:\frac{1}{10\,000}=1{,}325\cdot 10\,000=13\,250$. **6.** a) 29; b) 13890; c) 25; d) 86;) 35; f) 15590; g) 49,9; h) 14,1; i) 732,6(3). **7.** a) $\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}=2{,}8$; b) $\frac{2}{3}=0{,}(6)$; c) 3; d) $\frac{1}{2}=0{,}5$; e) $\frac{23}{50}=0{,}46$; f) $\frac{37}{10}=3{,}7$. **8.** a) $\frac{10}{21}$; b) 3; c) 2; d) $\frac{7}{22}$. **9.** a) $\frac{4}{9}$; b) 3; c) $\frac{2}{3}$; d) $1\frac{1}{8}$; e) $\frac{3}{11}$; f) $\frac{3}{7}$. **10.** a) 2; b) 1; c) $\frac{6}{11}$. **11.** $\frac{9}{28}$ şi $\frac{28}{9}$ respectiv $\frac{64}{25}$ şi $\frac{25}{64}$. **12.** a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{5}{16}$; d) $5\frac{1}{2}$; e) $\frac{2}{5}$; f) 3. **13.** a) 1; b) $\frac{6}{11}$; c) 4; d) 2; e) $\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}=3{,}4$; f) 1; g) $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}=1{,}5$; h) $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}=1{,}(3)$. **14.** a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{7}{10}$; c) $\frac{3}{19}$. **15.** a) $5\frac{1}{2}$; b) $\frac{5}{48}$; c) 5. **16.** $2\frac{1}{12}$. **17.** $\frac{43}{88}$. **18.** 8800. **19.** 39117,60 lei; 5400 kg grâu şi 4435,20 kg făină. **20.** a) 1 euro = 1,30 dolari; b) 1 dolar = 0,76 euro. **22.** a) Notăm $S=1+3+5+\ldots+2n-1$. Avem $S=2n-1+2n-2+2n-3+\ldots+1$, de unde $2S=\underbrace{2n+2n+2n+\ldots+2n}_{n}$, adică $S=\frac{2n\cdot n^2}{2n}=n^2$; b) Pentru $n=1008$ găsim că $1+3+5+\ldots+2\cdot 1008-1=1008^2$, ţinând cont de a).

24. Se demonstrează, ca la ex. 23, că $n<\frac{9}{10}=0{,}9$ şi folosind $0{,}4(09)<n<0{,}9$, se arată că $\frac{1}{9^2}>\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. **25.** Avem $S=\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{2015\cdot 2016}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2016}\right)=\frac{1007}{1008}$.

8. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a unui număr raţional pozitiv. Reguli de calcul cu puteri

1. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^6=\frac{3^6}{5^6}$; c) $[0{,}(2)]^2$; d) $[1{,}1(2)]^3$; e) $\left(2\frac{1}{7}\right)^4$. **2.** a) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; b) $[1{,}(2)]^5$; c) $(0{,}3)^{16}$; d) $\left(2\frac{1}{3}\right)^4$. **3.** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; c) $(0{,}9)^3$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; e) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$; f) $(0{,}7)^2$. **4.** a) 64; b) 125; c) 19; d) 324; e) $\frac{1}{8}$; f) $\frac{1}{8}$; g) $\frac{25}{4}$; h) $\frac{25}{4}$; i) $\frac{32}{243}$; j) 1; k) $\frac{1}{81}$; l) $\frac{13}{14}$; m) $\frac{1}{81}$; n) $\frac{64}{9}$; o) $\frac{1}{7776}$.

5. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$; b) $(0{,}4)^8$; c) $\left(\frac{23}{7}\right)^{18}$; d) $[1{,}(6)]^7$; e) $\left(\frac{5}{7}\right)^1$; f) $(1{,}25)^2$; g) $[(7{,}1(2))]^6$; h) $[(0{,}(2))]^{27}$; i) $\left(\frac{2}{7}\right)^{18}$; j) $\left(\frac{2}{7}\right)^5$; k) $\left(\frac{9}{7}\right)^{15}$; l) 1. **6.** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$; b) $0{,}125=\left(\frac{1}{2}\right)^3$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; e) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$. **7.** a) 3,375; b) 1,69; c) 1; d) 1,5625; e) 4,25; f) 0,(2); h) 2,5; i) 1; j) 5,(4). **8.** a) 27; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) 16. **9.** a) $\left(\frac{5}{2}\right)^3$; b) $\left(\frac{7}{3}\right)^3$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^0$; d) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$; e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; f) nu există. **10.** a) 1; b) $\frac{1}{9}$; c) 1; d) 1; e) 5,29; f) 1,21. **11.** a) $2{,}7\cdot 10^9$ şi $3{,}141\cdot 10$; b) $3{,}124=3{,}124\cdot 10^0$; $312{,}4=3{,}124\cdot 10^2$; $31{,}24=3{,}124\cdot 10$; $7\,000\,000\,000=7\cdot 10^9$; c) 270 000; 1200; 491; 38,43. **12.** a) $n=15$; b) deoarece este de forma $x\cdot 10^n$, unde x este fracţie zecimală, $1\le x\le 10$ şi $n\in\mathbb{N}$. **13.** a) 2^{16} şi 2^{12} sau 4^8 şi 4^6; b) 3^{20} şi 3^9; c) 5^9 şi 5^{12}; d) $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ şi $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; e) $\left(\frac{5}{3}\right)^9$ şi $\left(\frac{5}{3}\right)^4$; f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$ şi $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ sau $\left(\frac{1}{9}\right)^6$ şi $\left(\frac{1}{9}\right)^5$; g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ şi $\left(\frac{1}{3}\right)^9$; h) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$ şi $\left(\frac{1}{6}\right)^6$. **14.** a) 8^{10} şi 3^{10}; b) 25^{10} şi 49^{10}; c) $50{,}41^{12}$ şi $\left(\frac{512}{27}\right)^{12}$; d) $(13{,}824)^{25}$ şi $[66{,}15(1)]^{25}$; e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{18}$ şi $\left(\frac{9}{25}\right)^{18}$. **15.** a) $x=5$; b) $x=2$; c) $x=2$; d) $x=3$; e) $x=2$.

16. a) Din $2x+3=7\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$; b) $2x-4=18\Rightarrow 2x=22\Rightarrow x=11$; c) $16=x+13\Rightarrow x=3$; d) $5^7\cdot 0{,}2^7=1\Rightarrow\left(\frac{13}{11}\cdot\frac{11}{39}\right)^x=1\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^x=1\Rightarrow x=0$; e) $5+x=10\Rightarrow x=5$; f) $x-6=6\Rightarrow x=12$. **17.** a) Cum $(0{,}001)^6=[(0{,}1)^3]^6=(0{,}1)^{18}$ şi baza este subunitară, adică $0<0{,}1<1\Rightarrow 0{,}1^5>0{,}1^{18}$; b) $\left(\frac{8}{125}\right)^3=\left(\frac{2}{5}\right)^9\Rightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{21}<\left(\frac{2}{5}\right)^9$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{21}=\left(\frac{1}{5}\right)^{3\cdot 7}=\left(\frac{1}{125}\right)^7$ şi $\left(\frac{1}{4}\right)^{28}=\left(\frac{1}{4}\right)^{4\cdot 7}=\left(\frac{1}{256}\right)^7$. Având aceiaşi exponenţi, se compară bazele. Cum $\frac{1}{125}>\frac{1}{256}\Rightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{21}>\left(\frac{1}{4}\right)^{28}$; d) $\left(\frac{1}{27}\right)^3=\left(\frac{1}{3^3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^9$ şi $\left(\frac{1}{3}\right)^8<\left(\frac{1}{3}\right)^9\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^8<\left(\frac{1}{27}\right)^3$; e) $[0{,}(1)]^{10}=\left(\frac{1}{9}\right)^{10}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 10}=\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$, iar $\left(\frac{1}{27}\right)^3=\left(\frac{1}{3^3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^9\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{20}>\left(\frac{1}{3}\right)^9\Rightarrow[0{,}(1)]^{10}>\left(\frac{1}{27}\right)^3$. *Observaţie:* Pentru a compara numerele s-au adus la aceeaşi bază sau la acelaşi exponent. **18.** a) $2x+3\le 7\Rightarrow 2x\le 4\Rightarrow x\le 2$ şi $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\{0,1,2\}$; b) $3x+4<9\Rightarrow 3x<5\Rightarrow x<\frac{5}{3}$ şi $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\{0,1\}$. **19.** $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow a>b$.

21. Rezolvarea se bazează pe următoarele rezultate: O fracţie zecimală finită, transformată în fracţie ordinară, are numitorul care se divide doar cu 2 sau (şi) cu 5, pe când o fracţie zecimală periodică, transformată în fracţie ordinară, are numitorul care se divide şi cu alte numere decât 2 şi 5. Or, prin ridicare la pătrat, numitorul fracţiei zecimale finite va fi tot divizibil la 2 sau 5, deci nu poate fi o fracţie zecimală periodică. **22.** $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$; $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{1}{2014}+\frac{2013}{2014}=2014$; $B-A=2012$. **23.** a) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2014^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2014}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2013}{2014}=\frac{2013}{4028}$; b) $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{2015^2}<\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot 2015}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\right.$

$+ \ldots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2015}\Big) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2015}\right) < \frac{1}{2}$. **25.** a) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{43}{21^2 \cdot 22^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} -$ $- \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{21^2} - \frac{1}{22^2} = 1 - \frac{1}{22^2} = \frac{22^2 - 1}{22^2} = \frac{21 \cdot 23}{22^2}$; b) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{97 \cdot 99} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} +$ $+ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99}\Big) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{99}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{99} = \frac{49}{99}$.

9. Ordinea efectuării operaţiilor

1. a) 1,3 · 6 = 7,8; b) 0,(4) : 2 = $\frac{2}{9}$; c) $0{,}5^2 = 0{,}25$; d) $\frac{12}{5} + 0{,}(3) = \frac{12}{5} + \frac{1}{3} = \frac{41}{15} = 2\frac{11}{15}$ = 2,7(3); e) 2,7 + 1,38 = 4,08. **2.** a) $2^2 = 4$ şi 3,5 – 0,4 = 3,1; b) 0,4 · 6 = 2,4 şi $[1{,}3(18)]^0 = 1$; c) $3^2 = 9$ şi $3 \cdot \frac{2}{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; d) $1{,}2^2 = 1{,}44$ şi 3 · 0,5 = 1,5. **3.** a) „="; b) „≠"; c) „≠"; d) „="; e) „≠"; f) „=". **4.** a) 12; b) $\frac{23}{45}$; c) $\frac{9}{4}$; d) $\frac{273}{82}$; e) $\frac{2500}{1089}$. **5.** a) 12,8; b) 1,24; c) 41,9; d) 18,24. **6.** a) $3\frac{2}{5}$ = 3,4; b) $4\frac{1}{4}$ = 4,25; c) $1\frac{7}{8}$ = 1,875; d) $\frac{1}{8}$ = 0,125; e) 7; f) 2,65; h) 4,75; i) 0,59; j) 1; k) $1\frac{1}{4}$ = 1,25; l) $\frac{37}{30} = 1\frac{7}{30}$ = 1,2(3). **7.** a) $\frac{16}{9}$; b) $\frac{187}{6}$; c) $\frac{53}{2}$; d) $\frac{89}{30}$. **8.** a) 1,0023(148); b) 0,8(108); c) 0,25(4). **9.** a) $29\frac{3}{5}$ = 29,6; b) 0; c) 4; d) 34. **10.** a) $\frac{5}{9}$ = 0,(5); b) 1. **11.** a) $\frac{3}{5}; \frac{2}{5}; \frac{9}{20}$; b) 1. **12.** a) Se foloseşte definiţia împărţirii şi distributivitatea înmulţirii faţă de adunare. Din $(a + b) : c = (a + b) \cdot c^{-1} = a \cdot c^{-1} + b \cdot c^{-1} = a : c + b : c$; b) Există, de exemplu, $a = 0$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{2}$; c) Există, de exemplu, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$. **13.** a) Se aplică regula referitoare la ordinea efectuării operaţiilor (împărţirile se efectuează în ordinea în care sunt scrise); b) Contraexemplu: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 2$; se obţine $a : b : c \neq a : (b : c)$; c) $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c} = a : (b \cdot c)$. **14.** Se folosesc definiţiile date în partea teoretică. Dacă a este inversabil $\Rightarrow$ există $a' = a^{-1}$ astfel încât $a^{-1} \cdot a = 1$ şi b este inversabil $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ există $b' = b^{-1}$ astfel încât $b^{-1} \cdot b = 1$. Demonstrăm că $a \cdot b$ este inversabil şi că inversul numărului $a \cdot b$ este $a' \cdot b' = (a \cdot b)^{-1}$. Într-adevăr, $(a'b') \cdot (ab) = (a' \cdot a) \cdot (b' \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot (b^{-1} \cdot b) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow a'b' = a^{-1} \cdot b^{-1}$ este inversul numărului $a \cdot b$, adică $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. **15.** 37. **16.** $\frac{8}{13}$. **17.** 1. **18.** $\frac{4}{5}$. **19.** 9. **20.** 1.

10. Recapitulare şi sistematizare prin teste

Testul 1. **1.** 3,21; 0,04; 0,48; 3,(8); 0,1(6). **2.** $\frac{1}{4}; \frac{17}{5}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{7}{33}$. **3.** a) 110 = 11 · 2 · 5 şi $176 = 2^4 \cdot 11$ respectiv $960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$ şi $225 = 3^2 \cdot 5^2$; b) $\frac{11 \cdot 2 \cdot 5}{11 \cdot 2^4}^{(11\cdot2} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$ şi $\frac{2^6 \cdot 3 \cdot 5}{3^2 \cdot 5^2}^{(3\cdot5} = \frac{2^6}{3 \cdot 5} = \frac{64}{15}$. **4.** 4,376 < 4,(376) < 4,37(6) < 4,3(76). **5.** $\frac{12}{68} < \frac{12}{57} \Rightarrow \frac{3}{17} < \frac{4}{19}$. **6.** a) 42,25; b) 1; c) $\frac{105}{8}$ = 13,125.

7. 0,(4). **8.** 19,5. **9.** Pe 320 km a consumat $\frac{320 \cdot 7{,}2}{100}$ = 23,04 (ℓ) de benzină şi pe diferenţa de 570 – – 320 = 250 (km) a consumat $\frac{250 \cdot 7{,}4}{100}$ = 18,5 (ℓ) de benzină. În total a consumat 23,04 + 18,5 = = 41,54 (ℓ) de benzină. Deplasarea a costat 41,54 · 5,50 = 228,47 (lei).

Testul 2. **1.** a) $108 = 2^2 \cdot 3^3$; $162 = 2 \cdot 3^4$; $75 = 3 \cdot 5^2$; $25 = 5^2$; b) $\frac{108}{162} = \frac{2^2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^4}^{(2\cdot3^3} = \frac{2}{3}$ şi $\frac{75}{25} = \frac{3 \cdot 5^2}{5^2} = 3$. **2.** $\frac{75}{100}^{(25} = \frac{3}{4}$; $3{,}8 = \frac{38}{10}^{(2} = \frac{19}{5}$; $0{,}(6) = \frac{6}{9}^{(3} = \frac{2}{3} \cdot 0{,}2(7) = \frac{27 - 2}{90} = \frac{25}{90}^{(5} = \frac{5}{18}$. **3.** a) 3,24; 0,014; 0,2(7); 0,(6); 6,25. **4.** $\frac{136}{56} > \frac{133}{56} \Rightarrow \frac{17}{7} > \frac{19}{8}$. **5.** 3,921 < 3,92(1) < 3,9(21) < 3,(921). **6.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{77}{170}$; d) 3. **7.** $x = \frac{16}{9}$. **9.** 40 kg.

Testul 3. **1.** $\frac{59}{54}$. **2.** $\frac{2222230}{111111}$. **3.** $\left(\frac{3}{2}\right)^5$. **4.** 288,192 m³. **5.** $\frac{1}{6}$. **6.** asociativitatea, comutativitatea, admite element neutru, admite invers, distributivitatea. **7.** $n \in \{0, 5\}$. **8.** 4 ore. **9.** 30 km.

Testul 4. **1.** a) $\frac{26}{3}$; b) 0,7. **2.** $x \in \{6, 7, 8\}$. **3.** $A = \left\{\frac{105}{4}, \frac{115}{4}, \frac{125}{4}, \frac{315}{16}, \frac{345}{16}, \frac{375}{16}\right\}$. **4.** a) $\frac{5}{4}$; b) 4. **5.** 1,3. **6.** $\mathscr{P} = \frac{32}{5}$ m; $\mathscr{A} = \frac{64}{25}$ m². **7.** $x = 49$, $y = 7$. **8.** $\frac{50}{12}$. **9.** $\frac{n+1}{2(n+2)}$.

ECUAŢII ÎN $\mathbb{Q}_+$

11. Media aritmetică ponderată a unor numere raţionale pozitive

1. 8,62. **2.** a) $\frac{3}{5}$ = 0,6; b) 5. **3.** 1,36 lei. **4.** a) $\frac{8}{3}$ = 2,(6); b) $\frac{15}{16}$ = 0,9375. **5.** a) $\frac{30}{11}$ = 2,(72); b) 0,4; c) $\frac{19}{14}$ = 1,3(571424). **6.** a) $\frac{7}{3}$ = 2,(3); b) $\frac{10}{17}$. **7.** $z > y > x$. **8.** $\frac{5}{6}$ = 0,8(3). **9.** 4; 32; 76. **10.** 4,93 lei. **11.** 4300 kg. **12.** 1. **13.** a) 2; b) se măreşte cu 1. **14.** 1512. **15.** 1005. **16.** Cum r este media aritmetică ponderată a numerelor a şi $b \Rightarrow a < r < b$ (1). Se observă că s este media aritmetică a numerelor a şi $r \Rightarrow a < s < r$ (2) şi t este media aritmetică a numerelor r şi $b \Rightarrow r < t < b$ (3). Din (1), (2) şi (3) rezultă că $a < s < r < t < b$. **17.** Din $x^2 + x + 4 + 4x^2 + 4 = 30 \Rightarrow 5x^2 + x = 22 \Rightarrow x(5x + 1) = 22$ şi cum $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$; $x + 4 = 6$ şi $4x^2 + 4 = 20 \Rightarrow m_{ap} = \frac{12{,}5 \cdot 4 + \frac{89}{12} \cdot 6 + \frac{3}{4} \cdot 20}{30} = 3{,}65$. **19.** Avem $a_1 = 0$; $2a_2 = a_1 + 2012$; $2a_3 = a_2 + 2012$; …; $2a_{2012} = a_{2011} + 2012$. Adunând membru cu membru găsim $a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011} + a_{2012} + a_{2012} = 2011 \cdot 2012$. Cum $a_1 = 0$, găsim $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012} + a_{2012} = 2011 \cdot 2012$, adică $S_{2012} + a_{2012} = 2011 \cdot 2012$. **20.** $x = \frac{2011}{2012}$, $y = \frac{1}{2012}$, de unde $\frac{x + y}{2} = \frac{1}{2}$. **21.** a) Din $\frac{a+b+c}{d} = \frac{b+c+d}{a}$ găsim $\frac{a+b+c}{d} + 1 = \frac{b+c+d}{a} + 1$, de unde rezultă $\frac{a+b+c+d}{d} = \frac{a+b+c+d}{a}$, adică $d = a$. Analog $a = b = c = d$, de unde concluzia; b) Notăm $S = \frac{a+2012}{a} + \frac{b+2012}{b} + \frac{c+2012}{c} + \frac{d+2012}{d}$. Urmează că $S = 1 + \frac{2012}{a} + 1 + \frac{2012}{b} + 1 +$

$+\dfrac{2012}{c}+1+\dfrac{2012}{d}=4+2012\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)=4+2012\cdot\dfrac{abc+acd+bcd+abd}{abcd}=4+2012=2016.$

12. Ecuații în mulțimea numerelor raționale pozitive

1. a) Se înlocuiește x cu $\frac{1}{3}$ și se fac calculele; b), c) analog a). **2.** Se înlocuiește x pe rând cu câte un număr și se fac calculele. **3.** Se iau oricare trei numere raționale pozitive și se efectuează calculele. În funcție de rezultatul obținut se scrie dacă numărul respectiv este sau nu soluție a ecuației. **4.** a) $1\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{13}{35}$; d) $\frac{33}{35}$; e) $4\frac{4}{21}$; f) 1; g) $2\frac{17}{24}$. **5.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{7}{5}$; e) $\frac{7}{5}$; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{12}$; h) 4. **6.** a) $\frac{1}{14}$; b) $\frac{1}{55}$; c) 5; d) 3; e) 72; f) $\frac{2}{3}$. **7.** a) $\frac{8}{5}$; b) $\frac{9}{34}$; c) $\frac{65}{24}$; d) $\frac{22}{21}$; e) $\frac{4}{35}$; f) $\frac{7}{3}$; g) 2; h) 7; i) 42. **8.** a) 3,1; b) 1,27; c) 2; d) 74,25; e) 1,125; f) 3,5; g) 1,(851); h) 0,9; i) 10; j) 2. **9.** a) 16,1(3); b) 0,(7); c) 0,3(8); d) 2,125; e) 19,(857142); f) 11,3. **10.** a) 3; b) $\frac{3}{5}$; c) 1,5; d) 1. **11.** a) 3; b) 3. **13.** și **14.** Vezi rezolvarea exercițiului 12. **15.** Avem $2y - 2x = xy$, cu $y > x$. Obținem $(2 - x)(2 + y) = 4$, de unde $y = 2$, $x = 1$. **16.** $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{2013}}=2-\frac{1}{2^{2012}}=\frac{2^{2013}-1}{2^{2012}}$, de unde $x=\frac{1}{2}$. **17.** a) $x = 1$; b) $x = 2020$. **18.** $x = 2006$.

13. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

1. 68. **2.** 3,1(3). **3.** 18,75. **4.** 50. **5.** vechi – 27 lei, actual – 45 lei. **6.** 200 km. **7.** 5,25 lei. **8.** 40 ha. **9.** 6; 9. **10.** 280 lei inițial; 60 lei tabloul, 120 lei radioul. **11.** primul – 180 lei, al doilea – 100 lei. **12.** 360 kg. **13.** 405; 135; 63. **14.** 3. **15.** Femei – 8, copii – 26 și bărbați – 16. **16.** Soluțiile ecuației $3x + 5y + 7z = 43$ sunt următoarele triplete: $(x, y, z) \in \{(1, 1, 5); (3, 4, 2); (8, 1, 2); (2, 6, 1); (7, 3, 1)\}$. Corespunzător găsim tripletele de numere raționale: $\left(\frac{x}{5},\frac{y}{15},\frac{z}{25}\right)\in\left\{\left(\frac{1}{5},\frac{1}{15},\frac{1}{5}\right);\left(\frac{3}{5},\frac{4}{15},\frac{2}{25}\right);\left(\frac{8}{5},\frac{1}{15},\frac{2}{25}\right);\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{25}\right);\left(\frac{7}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{25}\right)\right\}$. **17.** Notăm cu x prețul unui kilogram de portocale. Atunci $\frac{6,40\cdot x}{2}+\frac{4,80\cdot x}{2}-4,50=3,60\cdot x$, obținând $x = 2,25$. **18.** Un număr îl înmulțim cu 4. La rezultatul său adunăm triplul dublului său, mai puțin 4, obținând astfel 88. Determinați numărul.

14. Recapitulare și sistematizare prin teste

Testul 1. 1. Presupunem că $\frac{2n+7}{n+3}$ nu este ireductibilă $\Rightarrow (\cdot)\ d \in \mathbb{N}^*, d \neq 1$ astfel încât $d \mid (2n + 7)$ și $d \mid (n + 3) \Rightarrow d \mid (2n + 7)$ și $d \mid 2 \cdot (n + 3) \Rightarrow d$ divide diferența lor $\Rightarrow d \mid 1$ (absurd), deoarece $d \neq 1 \Rightarrow \frac{2n+7}{n+3}$ este ireductibilă. **2.** a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{27}{70}$. **3.** $x = 3$. **4.** a) 280; b) 4; c) 5. **5.** 2, 3, 4, 5, 6. **6.** 37,5 lei suma; 1,5 lei în prima zi, 12 lei a doua zi și 6 lei a treia zi.

Testul 2. 1. $\frac{45}{1440};\frac{150}{1440};\frac{252}{1440};\frac{440}{1440}$. **2.** a) $\frac{115}{288}$; b) 1. **3.** a) $\frac{^{n+k)}1}{n}-\frac{^{n)}1}{n+k}=\frac{n+k-n}{n(n+k)}=\frac{k}{n(n+k)}$; b) $\frac{2007}{2008}$ (se folosește relația de la a)). **4.** $A = 1$, $B = 2005$, $B - A = 2004$, $A^B = 1$, $(B - 2000)^{A+1} = 25$. **5.** 75 km și 60 km. **6.** (2, 4); (6, 0).

Testul 3. 1. 1. **2.** a) $\frac{1}{180};\frac{1}{45};\frac{1}{36}$; b) $\frac{5}{180};\frac{1}{180};\frac{4}{180}$. **3.** $a + b = \frac{17}{18}$; $a - b = \frac{2}{9}$; $a \cdot b = \frac{91}{432}$; $a : b = \frac{21}{13}$. **4.** a) $x = 1$; b) $x \in M$; c) $x = 5 \notin M \Rightarrow$ ecuația nu are soluție în M. **5.** $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{12}{15}\right\}$, $B=\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{7};\frac{5}{6}\right\}$. **6.** a) $x \in \{0, 1, 2, ..., 7\}$; b) $x \in \{0, 1\}$.

Testul 4. 1. $\frac{2^{n-1}}{5^n}$. **2.** a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{25}{6}$. **3.** a) 90; b) 200. **4.** $x \in \{0, 4\}$. **5.** $\frac{17}{12}$ și $\frac{13}{12}$. **6.** $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

15. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1.

Perioada	Index vechi	Index nou	Consum
18.12 – 31.12	11381	11514	133
31.12 – 21.02	11514	12044	530
Zile	kWh/zi		TOTAL
66	**10.045**		**663**

CANT.	PREȚ	VALOARE		
13	0.1503		2.32	2.32
133	0.3125		49.45	49.46
52	0.1562		9.66	9.66
2	2.5		5.00	5.00
2	4		8.00	8.00
530	0.3247		204.78	204.79
0.663			3.37	3.37
TOTAL				**282.60**

E. ACTIVĂ	213.65
ABONAMENT	10.07
Taxa RADIO	5
Taxa TV	8
Accize	2.83
Total fără TVA	239.55
TVA 24%	57.49
Alte sume	0
TOTAL DE PLATĂ	**297.04**

2. Total factură fără TVA = 80,75 lei; total factură curentă = 96,09 lei. Total de plată = 100,01 lei.

3.

1.0000 ×	14.99	
File somon		14.99
0.3200 ×	17.90	
Musaca cartofi kg		5.72
0.1820 ×	19.90	
Pulpe pui kg		3.62
2.0000 ×	2.09	
Apă min. plată		4.18
3.0000 ×	7.99	
Cereale		23.97
3.0000 ×	3.99	
Lapte		11.97
4.0000 ×	0.49	
Iaurt cu fructe		1,96
TOTAL		66.41
TVA 24%		12.85
PLĂTIT LEI		**66.41**

4. Notăm cu x numărul scândurilor. Numărul tăieturilor va fi cu 1 mai mic decât numărul scândurilor. Rezultă ecuația $x \cdot 20 + (x - 1) \cdot 4 = 236$. Rezultă 10 scânduri. **5.** Notăm cu n numărul unităților de produs. Rezultă inecuația $p \cdot n - (c \cdot n + b) \geq p$, de unde $n \geq \dfrac{p-b}{p-c}$. Ea are soluții numai dacă $p > c$. **6.** Notăm cu x distanța cerută, cu t_1 timpul la dus și cu t_2 timpul la întors. Atunci $v_1 + v_2 = \dfrac{x}{t_1}$ și $v_1 - v_2 = \dfrac{x}{t_2}$. Din $t_1 + t_2 \leq t$, rezultă inecuația $\dfrac{x}{v_1+v_2} + \dfrac{x}{v_1-v_2} \leq t_1$. **7.** Notăm cu x distanța de la punctul D la punctul B. Rezultă inecuația $p_1 \cdot \dfrac{100+p}{100} + cx \leq p_1 + (d-x) \cdot c$ etc. **8.** $IJ = 750$ cm și $IK = 1650$ cm. Deoarece se utilizează un număr întreg de panouri dreptunghiulare de lungime l, rezultă l / 750 și l / 1650 și, cum l este cel mai mare posibil, rezultă l = c.m.m.d.c.(750, 1650) = 150. Sunt necesare 32 de panouri.

Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare

1. 8. **2.** $n = 2014$. **3.** $x = 2014$. **4.** 51. **5.** 1007. **6.** $\dfrac{3a}{2} = \dfrac{4b}{3} = \dfrac{5c}{4} = k$, de unde $k = \dfrac{4}{11}$, iar $a = \dfrac{8}{33}$, $b = \dfrac{3}{11}$, $c = \dfrac{16}{55}$. Obținem că $3a - 3b + 5c = \dfrac{15}{11}$, de unde rezultă $\dfrac{4}{3} < \dfrac{15}{11} < \dfrac{7}{5}$. **7.** a) $A = 1007$, $B = \dfrac{1}{2015}$; b) $\dfrac{1007}{2015} < \dfrac{1}{2}$. **8.** $A = \dfrac{9+a}{90} + \dfrac{a}{9} + \dfrac{9a+1}{90} = \dfrac{20a+10}{90} = \dfrac{2a+1}{9}$, de unde $a \in \{4, 9\}$. **9.** Evident $N = 9k$, din formula de transformare a fracțiilor zecimale periodice mixte în fracții ordinare. **10.** $3x + 3y = xy$ conduce la $(x - 3)(y - 3) = 9$, de unde $(x, y) \in \{(4, 12), (6, 6), (12, 9)\}$. **11.** $x = \dfrac{10+x}{99} + \dfrac{20+x}{99} + ... + \dfrac{90+x}{99}$, de unde $99x = 10 + x + 20 + x + 30 + x + ... + 90 + x$, adică $99x = 10(1 + 2 + ... + 9)$; $9x = 9 \cdot 5 \Rightarrow x = 5$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. DREAPTA

1. Punct. Dreaptă. Plan

1. punct, dreaptă, plan. **2.** litere mari, litere mici, litere grecești. **4.** o mulțime de puncte dintr-un plan. **5.** riglă gradată, echer, raportor, compas. **6.** $A \in a$, $A \in b$, $\{A\} = a \cap b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $c \not\subset \alpha$, $\{C\} = c \cap \alpha$. **7.** $A \in a$, $A \in b$, $A \in c$, $A \notin d$; $B \in c$, $B \notin b$, $B \notin a$, $B \notin d$; $C \in b$, $C \notin b$, $C \notin a$, $C \notin d$; $D \in c$, $D \notin b$, $D \notin a$, $D \notin d$.

2. Poziții relative ale punctelor și ale dreptelor

2. a). **3.** a) (A, B); (A, C); (B, C); b) AB, AC, BC; c) 3 drepte. **4.** când punctele aparțin aceleiași drepte. **6.** a) $\{B\}$; $\{A\}$; $\varnothing$; $\varnothing$; b) i) AA' cu BB', BC cu $B'C'$, DD' cu CC'; ii) AB cu CC'; CD cu BB'; $A'B'$ cu DD'; c) necoplanare: $B'C'$ cu AA'; AA' cu $D'C'$; secante: AD cu AB; CC' cu CB; paralele: AD cu $A'D'$; AB cu DC; d) DA cu DD' cu DC. **7.** a) 5 plane; 8 drepte; b) i) AB cu CD; AD cu BC; ii) VA, VB; VC, VD; AB, AD, AV etc.; iii) VA cu DC, VD cu BC etc.; c) AV, AB, AD și CB, CD, CV. **8.** dreptele sunt concurente în A. **9.** se desenează triunghiul ABC. **10.** dreptele a și b sunt concurente în M, $a = MN$ și $b = MP$. **11.** a) 12 drepte și 6 plane; b) i) AD cu CC' și AD cu BB', AA' cu DC și cu BC și analog pentru fiecare muchie; ii) AD cu AB, AD cu AA', AB cu AA' și analog pentru celelalte; iii) $AB \parallel DC$, $AB \parallel A'B'$, $AB \parallel D'C'$ și analog pentru fiecare muchie; c) DD', DC și DA și analog pentru celelalte vârfuri. **12.** dreptele sunt A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5 și A_4A_5. **13.** trei puncte. **14.** da, de exemplu dreapta d intersectează dreptele d_1 și d_2 și este paralelă cu d_3.

3. Distanța dintre două puncte. Semidreaptă. Semiplan

1. c) corectă este iii). **2.** 2 cm = 20 mm = 0,002 dam = 0,2 dm = 0,00002 km = 0,0002 hm. **3.** Oricare dintre ei poate avea dreptate deoarece aproximările la centimetri sunt aceleași, 27 cm. **4.** a) $(BA$ sau $[BA$; b) AB; c) $[AB$ sau $(AB$. **5.** a) $[AB$; b) $(AB$; c) $(AB]$. **6.** adevărată c), restul false. **7.** a) AC separă vârfurile B și D, BD separă vârfurile A și C; b) A și B sunt de aceeași parte a lui CD și analog pentru celelalte laturi. **8.** a) $[aP$; b) $(aP$. **9.** de aceeași parte a dreptei d. **10.** a) trei; b) cinci.

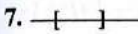
11.

$\in$	$[AB$	$(BC$	$[BA$	$(DC$
A	da	nu	da	da
B	da	nu	da	nu
C	da	da	nu	da
D	da	da	nu	nu

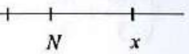
4. Segment. Lungimea unui segment. Segmente congruente. Mijlocul unui segment

1. $[CD]$. **2.** a) $[AB]$; b) (AB); c) (AB); d) $(AB$; e) $[AB)$; f) $(AB]$; g) (AB); h) (AB); i) $[AB]$; j) $(AB]$; k) $[AB]$; l) $[AB)$. **3.**


4. $|AB|$ înseamnă distanța între A și B. AB reprezintă dreapta determinată de punctele A și B, iar $[AB]$ reprezintă segmentul închis cu extremitățile în A și B. Nu, deoarece reprezintă noțiuni diferite. **5.** $AB = CD \Rightarrow [AB] \equiv [CD]$. **6.** Analog cu 5.

7.


8. a)

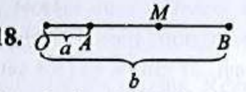

b)


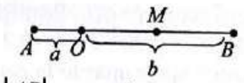
9. a) $AC = 2,5$ cm; b) se măsoară. **10.** $|AC| = |AB| + |BC| = |DE| + |EF| = |DF|$. **11.** 109 + 37 + 21 + + 24 = 191 (km), 37 + 21 + 24 = 82 (km), 21 + 24 + 35 = 80 (km); 109 + 37 + 21 = 167 (km). **12.** $|AB| = |OB| - |OA| = (3 - 1,4)$ cm $= 1,6$ (cm); $|BC| = |OC| - |OB| = (4,7 - 3)$ cm $= 1,7$ cm; $|BD| = |OD| - |OB| = (6,8 - 3)$ cm $= 3,8$ cm; $|AD| = |OD| - |OA| = (6,8 - 1,4)$ cm $= 5,4$ cm. **13.** $|AB| = |OB| - |OA| = (7 - 3)$ cm $= 4$ cm; $|AM| = \dfrac{1}{2} \cdot |AB| = \dfrac{1}{2} \cdot 4$ cm $= 2$ cm; $|OM| = |OA| + |AM| = (3 + 2)$ cm $= 5$ cm. **14.** $|AM| = |OA| + |OM| = (32 + 40)$ cm $= 72$ cm. Dar $|AM| = |MB| = 72$ cm și $|OB| = |OM| + |MB| = (40 + 72)$ cm $= 112$ cm. **15.**


Se calculează $|AB| = |OB| - |OA| = (6 - 2)$ cm $= 4$ cm; D este mijlocul lui $[AB] \Rightarrow |AD| = |BD| = \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{4}{2}$ cm $= 2$ (cm) și $|OD| = |OA| + |AD| = (2 + 2)$ cm $= 4$ cm. Se calculează $|BC| = |OC| - |OB| = (12 - 6)$ cm $= 6$ cm; E este mijlocul lui $[BC] \Rightarrow |BE| = |EC| = \dfrac{|BC|}{2} = \dfrac{6}{2}$ cm $= 3$ cm și $|OE| = |OB| + |BE| = (6 + 3)$ cm $= 9$ cm. Se calculează $|DE| = |OE| - |OD| = (9 - 4)$ cm $= 5$ cm. Fie M mijlocul lui $[DE] \Rightarrow |DM| = |ME| = \dfrac{5}{2}$ cm $= 2,5$ cm $\Rightarrow |OM| = |OD| + |DM| = (4 + 2,5)$ cm $= 6,5$ cm $\Rightarrow |OM| = 6,5$ cm (1). Se calculează $|AC| = |OC| - |OA| = (12 - 2)$ cm $= 10$ cm. Fie F mijlocul lui $[AC] \Rightarrow |AF| = |FC| = \dfrac{|AC|}{2} = \dfrac{10}{2}$ cm $= 5$ cm și $|OF| = |OA| + |AF| = (2 + 5)$ cm $= 7$ cm, iar $|BF| = |OF| - |OB| = (7 - 6)$ cm $= 1$ cm. Fie N mijlocul lui $[BF] \Rightarrow |BN| = |NF| = \dfrac{1}{2}$ cm $= 0,5$ cm și $|ON| = |OB| + |BN| = (6 + 0,5)$ cm $= 6,5$ (cm) $\Rightarrow |ON| = 6,5$ (cm) (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow |OM| = |ON|$. Cum O, M, N sunt coliniare, cu M și N de aceeași parte față de $O \Rightarrow M = N$ (punctele M și N coincid), adică segmentele $[DE]$ și $[BF]$ au același mijloc.

16.

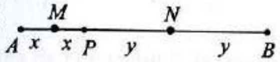

$|BC| = |AC| - |AB| = (2,5 - 1)$ cm $= 1,5$ cm, $|CD| = |BD| - |BC| = (4 - 1,5)$ cm $= 2,5$ cm. $|AD| = |AC| + |CD| = (2,5 + 2,5)$ cm $= 5$ cm. **17.** 43601,6 – 43598,8 = 2,8 (km).

18. 



Se calculează $|OM| = |OA| + |AM| = |OA| + \frac{|AB|}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ (1).

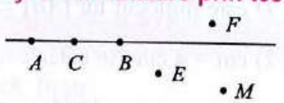
Se calculează $|OM| = |AM| - |AO| = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ (2) și analog pentru cazul când $B \in [OA]$.

19. a) 

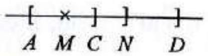
b) Cum $x + y = 2,75 \Rightarrow |AB| = 2 \cdot (x + y) = 2 \cdot 2,75 = 5,5$ (m).

20. 6 cm. **21.** 4 cm. **22.** $|MN| = |NP| = 4,5$ cm. **23.** a) $\frac{2}{3^n}$; b) Notăm $S = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{2}{3^n}$, iar $\frac{1}{3}S = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + ... + \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}$; $S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3} - \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2 \cdot 3^n - 2}{3^{n+1}} = \frac{2(3^n - 1)}{3 \cdot 3^{n+1}}$. Cum $S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S$, atunci $S = \frac{3^n - 1}{3^{n+1}}$. **24.** a) D, A, C, B; b) 40; c) $O \in [AD$; $\frac{OA}{OB} = \frac{8}{50} = \frac{2}{25}$. **25.** a) $AM_{1998} = \frac{AB}{3^{1998}}$; b) $S = 2\left(\frac{AB}{3} + \frac{AB}{3^2} + ... + \frac{AB}{3^{1998}}\right) + 1 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{3^{1998}}\right)AB + 1 = \frac{2}{3}\frac{\left(1 - \frac{1}{3^{1998}}\right)}{\frac{2}{3}}AB + 1 = \left(1 - \frac{1}{3^{1998}}\right)AB + 1 = \frac{3^{1998} - 1}{3^{1998}} \cdot AB + 1 = 3^{1998} - 1 + 1 = 3^{1998} = AB$. **26.** p adevărată; $AQ = QB = BP = \frac{AP}{3}$, de unde $\frac{3}{AP} + \frac{3}{AP} + \frac{3}{AP} = \frac{9}{AP} \geq \frac{2}{AP}$ adevărată, adică și q adevărată. **27.** Numărul maxim de drepte prin care pot fi unite n puncte este $\frac{n(n-1)}{2}$. În cazul nostru $n = 15$, deci numărul maxim de drepte pe care le putem uni cu ajutorul celor 15 puncte este 105. Răspunsul este nu.

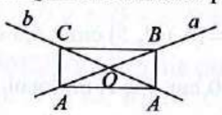
5. Recapitulare și sistematizare prin teste

Testul 1. 1. a) 

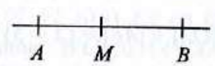
b) $[AC$.

2. Fie cazul ordonării punctelor ca în figura alăturată.
Atunci: a) A; b) F; c) F.


Analog restul cazurilor posibile de ordonare a punctelor.

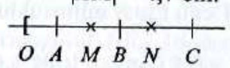
3. 

4. $|AC| = 4,3$; $|AD| = 13$; $|BD| = 10,5$.

Testul 2. 1. Cazuri: a) 

$|AM| = 0,9$ cm; b) 

$|AM| = 4,7$ cm.

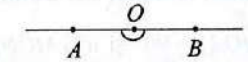
2. $|BC| = 4$; $|AM| = 3$; $|MN| = 5$; $|AC| = 10$. **3.** a) 

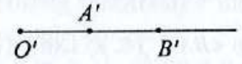
b) $|AB| = 5$ (1); $|BC| = |AC| - |AB| = 5$ (2). Din (1) și (2) rezultă $|AB| = |BC|$, adică B este mijlocul lui $[AC]$; c) $|MN| = |AC| - |AM| - |NC| = 10 - 2,5 - 2,5 = 5$.

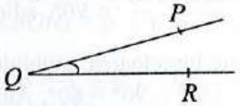
Testul 4. 4. a) $|MN| = 6$ cm; b) $|PQ| = 3$ cm.

1. Unghi. Unghi nul. Unghi alungit

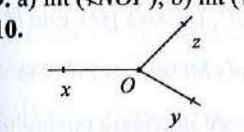
1. a) Un unghi este reuniunea a două semidrepte închise care au aceeași origine; b) $[AB \cup [AC = \sphericalangle BAC$ și $(AB, C \cap (AC, B = \text{int}(\sphericalangle BAC)$. **2.** (AB) și (AC) sunt segmente și nu semidrepte. **3.** a), b), d), e), h). **4.** Nu, există posibilitatea confundării cu $\sphericalangle ACD$, $\sphericalangle BCD$ etc. **5.** $\sphericalangle AMF$, $\sphericalangle AME$, $\sphericalangle AMD$, $\sphericalangle FME$, $\sphericalangle FMD$, $\sphericalangle FMC$, $\sphericalangle EMD$, $\sphericalangle EMC$, $\sphericalangle EMB$, $\sphericalangle DMC$, $\sphericalangle DMB$, $\sphericalangle DMA$, $\sphericalangle CMB$, $\sphericalangle CMA$, $\sphericalangle BMA$. **6.** P și T sunt interioare și B, Q și R nu sunt interioare. **7.** a) $\sphericalangle AOB$; b) int($\sphericalangle AOB$); c) $[AB]$; d) $\{A, B\}$.

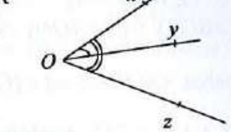
8. 



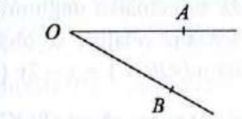


9. a) int ($\sphericalangle NOP$); b) int ($\sphericalangle MON$); c) false.

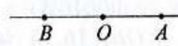
10. 

11. a) $\sphericalangle xOy$, $\sphericalangle yOz$, $\sphericalangle xOz$; c) 

12. Dacă $Q \in (PR)$, atunci $\sphericalangle PQR$ și $\sphericalangle RQP$ sunt alungite, iar $\sphericalangle QRP$, $\sphericalangle RPQ$ și $\sphericalangle QPR$ sunt nule. Dacă $P \in (QR)$, atunci unghiul $\sphericalangle QPR$ este nul.

13. a) 

b) 

c) 

Unghiul $\sphericalangle AOB$ este a) unghi propriu; b) unghi nul; c) unghi alungit.

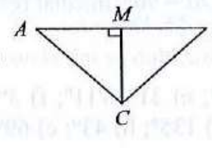
2. Măsurarea unghiurilor. Unghi drept. Unghi ascuțit. Unghi obtuz. Calcule cu măsuri de unghiuri

1. a) A, A, F. b) În vârful A sunt: $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle BAM$, $\sphericalangle DAM$ și analog pentru fiecare vârf. În vârful A, $\sphericalangle BAN$, $\sphericalangle NAM$, $\sphericalangle NAQ$, $\sphericalangle QAD$, $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAD$ și analog pentru fiecare vârf. **2.** $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle BDA$, $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DBC$, $\sphericalangle DBA$, $\sphericalangle DCA$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ACD$, $\sphericalangle ECA$, $\sphericalangle ECD$, $\sphericalangle EBD$, $\sphericalangle EBA$. b) ascuțite; c) m($\sphericalangle BCF$) = 180° și cum m($\sphericalangle BCA$) < 90° $\Rightarrow$ m($\sphericalangle ACF$) = 180° – m($\sphericalangle BCA$) > 90°. **3.** a) 60°; b) 180°. **4.** a) $\varnothing$ și $\{E\}$. b) 70°, 50°, 60°. c) 70° + 50° + 60° = 180°. **5.** 10°, 30°, 45°, 150°, 130°, 70°, 180°. **6.** a) 30°7'12''; b) 75°10'48''; c) 15°12'36''; d) 18°15'. **7.** a) 30,2025°; 1812,15'; 108729''. b) 37,605°; 2256,3'; 135378''. **8.** $\pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$; $2\pi/3$; $3\pi/4$. **9.** 37°30'. **10.** 2 posibilități, cealaltă semidreaptă poate fi de o parte sau alta a semidreptei inițiale. **11.** a) 127°; b) 53°59'; c) 78°37'29''. **12.** m($\sphericalangle A'OB$) = 180° – 70° = 110°; m($\sphericalangle A'OC$) = 180° – 40° = 140°; m($\sphericalangle COB$) = 70° – 40° = 30°. **13.** m($\sphericalangle DAC$) = m($\sphericalangle BAC$) + m($\sphericalangle BAD$); a) 130°; b) 172°37'; c) 135°41'; d) 133°. **14.** a) 12°55'; b) 166°45'36''; c) 45°49'55''; d) 126°36'39''. **15.** a) m($\sphericalangle AOD$) = 22,5°; m($\sphericalangle DOC$) = 67,5°; m($\sphericalangle COB$) = 90°; b) m($\sphericalangle COD$) = 60°. **16.** m($\sphericalangle AOC$) = 24° și m($\sphericalangle BOD$) = 48°. **17.** a) 35 poziții; b) $n = 15$.

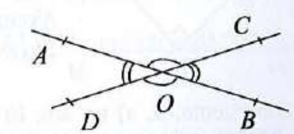
3. Unghiuri congruente. Bisectoarea unui unghi

1. a) dacă au aceeași măsură; b) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$; dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, atunci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A$; dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$. **2.** a) Egalitatea este privită între mulțimi de puncte (unghiurile reprezintă aceeași mulțime de puncte). b) Unghiurile sunt congruente pentru că au aceeași măsură.

3. $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle COB$, $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

4. a) 

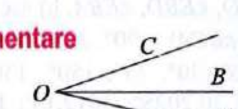
b) i) $M \in (AB)$ și $(MA) = (MB)$;
ii) se măsoară $\sphericalangle CAB$ și $\sphericalangle CBA$.



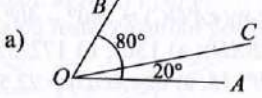
6. a) $m(\sphericalangle BAD)$; b) $m(\sphericalangle EAC)$; c) $m(\sphericalangle EAB)$; d) $m(\sphericalangle EAD)$; e) $m(\sphericalangle BAC)$. **7.** a) $m(\sphericalangle EDC)$; b) $m(\sphericalangle EDC)$; c) $m(\sphericalangle BCD) - m(\sphericalangle BCA)$; d) $m(\sphericalangle EAB)$. **8.** vezi construcţia unui unghi congruent cu un unghi dat. c) $106° + 17° = 123°$. d) Nu, deoarece $106° + 90° = 196°$ şi $196° > 180°$. **9.** Cum $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ABP) + m(PBC) \Rightarrow m(\sphericalangle ABC) > m(\sphericalangle ABP)$ şi $m(\sphericalangle ABC) > m(\sphericalangle PBC)$. **10.** Se realizează figura şi se foloseşte proprietatea: „Dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $a + c = b + d$". **11.** Fie $[OI$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ cu $m(\sphericalangle AOB) < 180° \Rightarrow m(\sphericalangle AOI) = m(\sphericalangle BOI) = \dfrac{m(\sphericalangle AOB)}{2}$ şi cum $m(\sphericalangle AOB) < 180° \Rightarrow \dfrac{m(\sphericalangle AOB)}{2} < 90°$, adică $\sphericalangle BOI$ şi $\sphericalangle AOI$ sunt unghiuri ascuţite. **12.** Definiţia bisectoarei. **13.** $[AO$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. **14.** a) Din $m(\sphericalangle MOA) = 90°$ şi $m(\sphericalangle MON) = 150° \Rightarrow m(\sphericalangle NOA) = 150° - 90° = 60°$. Analog $m(\sphericalangle BOM) = 60°$; cum $m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle BOA) + m(\sphericalangle AON) \Rightarrow 150° = 60° + m(\sphericalangle BOA) + 60° \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 30°$. b) Dacă $[OX$ este bisectoarea $\sphericalangle AOB \Rightarrow m(\sphericalangle AOX) = m(\sphericalangle BOX) = \dfrac{30°}{2} = 15°$ şi $m(\sphericalangle MOX) = m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle BOX) = 60° + 15° = 75°$. Analog, $m(\sphericalangle NOX) = 75°$. Cum $m(\sphericalangle MON) = 150°$, $[OX$ este interioară unghiului $\sphericalangle MON$ şi $m(\sphericalangle MOX) = m(\sphericalangle NOX) = 75° \Rightarrow [OX$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MON$. **15.** a) Fie $[OC$ bisectoarea $\sphericalangle AOB \Rightarrow m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle COB)$ şi cum $m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle BON)$ adunând relaţiile $\Rightarrow [OC$ bisectoarea $\sphericalangle MON$. Analog, dacă $[OD$ este bisectoarea $\sphericalangle MON$. b) Fie $[OX$ bisectoarea unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle MON \Rightarrow m(\sphericalangle AOX) = m(\sphericalangle BOX)$ şi $m(\sphericalangle MOX) = m(\sphericalangle NOX)$ şi scăzând relaţiile se obţine $m(\sphericalangle MOA) = m(\sphericalangle NOB)$. **16.** a) Notăm $m(\sphericalangle AOC) = x$, $m(\sphericalangle AOD) = y$. Atunci $m(\sphericalangle BOC) = x - 2y$ (1). Pe de altă parte, $m(\sphericalangle EOD) = m(\sphericalangle AOE) - m(\sphericalangle AOD) = \dfrac{x}{2} - y$ (2). Din (1) şi (2) avem că $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle EOD)$. **17.** $m(\sphericalangle BOD) = 120°$; $m(\sphericalangle AOF) = 100°$; $m(\sphericalangle EOF) = 30°$. **18.** a) $45°$; b) $m(\sphericalangle ABC) = 112°30'$. **19.** Notăm $m(\sphericalangle AOM) = \alpha$, $m(\sphericalangle BON) = \beta$, $m(\sphericalangle COP) = \gamma$; a) $m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOD) = 2\beta + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2(\alpha + 2\beta + \gamma)$ (1); $m(\sphericalangle AOD) + m(\sphericalangle BOC) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\beta = 2(\alpha + 2\beta + \gamma)$ (2). Din (1) şi (2) avem relaţia cerută; b) Din $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle COD)$ avem $2\alpha = 2\gamma$, adică $\alpha = \gamma$ (3). Atunci $m(\sphericalangle AOC) = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$ (4); $m(\sphericalangle BOD) = 2\beta + 2\gamma = 2(\beta + \gamma)$ (5). Din (3), (4) şi (5) avem relaţia; c) $m(\sphericalangle AOB) + 2m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 184°$.

4. Unghiuri adiacente. Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare

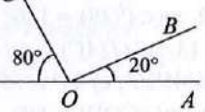
1. a) Dacă au acelaşi vârf, o latură comună şi interioarele disjuncte; b) $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ unghiuri adiacente; c) nu au acelaşi vârf, respectiv interioarele nu sunt disjuncte.



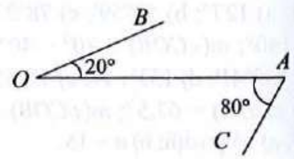
2. a)



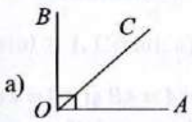
b)



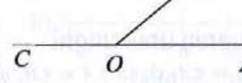
c)



3. a)



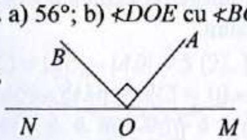
$\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle BOC$; b)



$\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$.

4. a) $56°$; b) $\sphericalangle DOE$ cu $\sphericalangle BOC$. **6.** congruente.

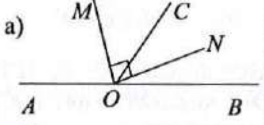
7.



Avem $\sphericalangle BON + \sphericalangle AOB + \sphericalangle AOM = 180°$. Cum $\sphericalangle AOB = 90°$, imediat rezultă $\sphericalangle BON + \sphericalangle AOM = 90°$, adică sunt complementare.

8. congruente. **9.** a) nu are; b) este. **10.** a) $60°$; b) $45°$; c) $30°$; d) $74°42'$; e) $31°56'11''$; f) $3°57''$. **11.** $22°30'$; $67°30'$. **12.** $25°$ şi $65°$. **13.** $90°$. **14.** a) $18°$; b) $30°$; c) $60°$. **15.** a) $135°$; b) $43°$; c) $69°40'$; d) $114°56'31''$; e) $45°57''$. **16.** a) $45°$; b) drept. **17.** $135°$; $45°$. **18.** $102°$. **19.** $45°$ şi $135°$. **20.** $50°$. **21.** a) complementare; b) complementare, congruente şi adiacente. **22.** a) $45°$; b) $90°$. **23.** $m(\sphericalangle AOC) = 135° = m(\sphericalangle BOD)$ şi $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle COB) = 45°$. **24.** $30°$. **25.** b) $60°$. **26.** $22°30'$ şi $67°30'$. **27.** $60°$. **28.** $95°28'46'' = m(\sphericalangle AOB)$; nu există un asemenea unghi propriu în afară de cel de $0°$. **29.** a) $100°$; b) $m(\sphericalangle ABC) = 10°$, $m(\sphericalangle CBD) = 90°$.

30. a)



b) Notăm $m(\sphericalangle BON) = \alpha$ şi $m(\sphericalangle AOM) = \beta$. Atunci $m(\sphericalangle MON) = \alpha + \beta$. Dar $2\alpha + 2\beta = 180°$, de unde $\alpha + \beta = 90°$, adică $m(\sphericalangle MON) = 90°$. Analog $m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle BON) = \alpha + \beta = 90°$, ceea ce arată că sunt complementare.

31. Rezolvând ecuaţia $3a + b + 6c = 51$, găsim $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$. De aici găsim că $m(\sphericalangle BOC) = 37°30'$; $m(\sphericalangle COD) = 87°30'$, de unde $m(\sphericalangle MON) = 62°30'$. **32.** $m(\sphericalangle BOC) = 72°$, $m(\sphericalangle AOD) = 18°$, $m(\sphericalangle DOC) = 54°$. **33.** Fie AM bisectoarea unghiului ABC, AN bisectoarea $\sphericalangle ABD$. Unghiul celor două bisectoare este de $25°$.

5. Unghiuri opuse la vârf. Congruenţa lor

1. a) $45°$ fiecare. b) $90°$ fiecare. **2.** a) $20°$; $160°$; $160°$. b) $110°$; $70°$; $70°$. c) $75°$; $105°$; $105°$. d) $90°$ fiecare. **3.** $180°$, semidrepte opuse. **4.** $75°$. **5.** $70°$; $110°$; $70°$; $110°$. **6.** a) $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle AOC) = 30°$, $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle COB) = 150°$; b) Din $x + 90° + x = 180° \Rightarrow x = 45° \Rightarrow m(\sphericalangle BOD) = 45°$ şi $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle COB) = 135°$; c) $2x + 6x - 60° = 180° \Rightarrow x = 30° \Rightarrow m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle BOD) = 60°$ şi $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle COB) = 120°$. d) $\dfrac{x}{4} + 2x = 180° \Rightarrow x = 80°$ şi $m(\sphericalangle COB) = m(\sphericalangle AOD) = 20°$, iar $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle BOD) = 160°$. **7.** b) Cum $m(\sphericalangle 4) = m(\sphericalangle 3)$ (opuse la vârf) $\Rightarrow m(\sphericalangle 1) + m(\sphericalangle 2) + m(\sphericalangle 3) = 180°$. **8.** $m(\sphericalangle AOB) = 180° - (\alpha + \beta)$; $m(\sphericalangle AOD) = \alpha° + \beta°$; $m(\sphericalangle COD) = 180° - \beta°$. **9.** a) $54°$ şi $126°$; b) $28°$ şi $152°$. **10.** a) $m(\sphericalangle RON) = m(\sphericalangle SOM) = 25°$; $m(\sphericalangle POM) = m(\sphericalangle NOQ) = 65°$; $m(\sphericalangle POR) = m(\sphericalangle QOS) = 90° = m(\sphericalangle ROQ)$. b) $\sphericalangle MOP$ şi $\sphericalangle MOS$; $\sphericalangle RON$ cu $\sphericalangle NOQ$; $\sphericalangle ROQ$ cu $\sphericalangle POS$. c) $\sphericalangle POS$ cu $\sphericalangle SOQ$, $\sphericalangle SOQ$ cu $\sphericalangle QOR$; $\sphericalangle QOR$ cu $\sphericalangle ROP$; $\sphericalangle ROP$ cu $\sphericalangle POS$. d) $\sphericalangle RON$ cu $\sphericalangle MOS$; $\sphericalangle ROP$ cu $\sphericalangle QOS$; $\sphericalangle NOQ$ cu $\sphericalangle POM$. **11.** a) $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD) = 60°$. Cum $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$, avem $m(\sphericalangle AOB) = 130°$; $m(\sphericalangle AOD) = 150°$; $m(\sphericalangle COD) = 30°$; $m(\sphericalangle BOC) = 150°$; b) $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle COD) = 240°$. Cum $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle AOC) = 180°$, avem $m(\sphericalangle COD) = 60°$; $m(\sphericalangle AOB) = 60°$; $m(\sphericalangle AOD) = 120°$; $m(\sphericalangle BOC) = 120°$. **12.** Fie $(Ou$ bisectoarea $\sphericalangle xOy$ şi $(Ov$ bisectoarea $\sphericalangle yOz$. Notăm $m(\sphericalangle xOy) = 2\alpha$ şi $m(\sphericalangle yOz) = 2\beta$. Avem $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{2}{3}$. Fie $[Oy'$ semidreapta opusă lui $[Oy$ şi $[Ox'$ semidreapta opusă lui $[Ox$; a) $m(\sphericalangle uOy') = 136°$; b) $m(\sphericalangle vOx') = 144°$.

6. Unghiuri în jurul unui punct. Suma măsurilor lor

1. $120°$. **2.** $70°$; $71°$; $72°$, $73°$; $74°$. **3.** $m(\sphericalangle EOF) = 49°$ şi $m(\sphericalangle DOF) = 114°$. **4.** $m(\sphericalangle MON) = 105°$ şi $m(\sphericalangle AOC) = 150°$. **5.** a) $m(\sphericalangle AOC) = 150°$. b) $m(\sphericalangle AOB) = 30°$; $m(\sphericalangle COD) = 80°$; $m(\sphericalangle AOE) = 110°$. **6.** $90°$ fiecare. **7.** a) $m(\sphericalangle AOC) = 38°$, $m(\sphericalangle AOC') = 142°$; $m(\sphericalangle A'OB) = 104°$. b) $m(\sphericalangle A'OC') = 38° = m(\sphericalangle COB)$. c) Din $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle COB) = 38° \Rightarrow [OC$ este bisectoarea $\sphericalangle AOB$. Analog pentru $\sphericalangle A'OB'$. **8.** a) $m(\sphericalangle COB) = 30°$, $m(\sphericalangle BOE) = 150°$, $m(\sphericalangle DOE) = 30°$, $m(\sphericalangle AOE) = 120°$; b) $150°$. **9.** a) $m(\sphericalangle AOB) = 110°$; $m(\sphericalangle COB) = 180°$, $m(\sphericalangle AOC) = 70°$. b) Se calculează $m(\sphericalangle MON) = \dfrac{m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle AOC)}{2} = \dfrac{110° + 70°}{2} = 90°$. **10.** a) $35°$. b) $n° = 25°$. **11.** $\sphericalangle a = 144°$; $\sphericalangle b = 96°$; $\sphericalangle c = 72°$; $\sphericalangle d = 48°$. **12.** a) $172°$; $m(\sphericalangle AOD) = 68°$; $m(\sphericalangle BOC) = 42°$. **13.** În prima secundă $2°34'17''$, în secunda doi se dublează: $5°8'34''$ ş.a.m.d. **14.** 7.

7. Recapitulare şi sistematizare prin teste

Testul 1. **1.** nul. **2.** 48°39'23". **3.** 45°. **4.** OM. **5.** ascuţit. **6.** 0°. **7.** 37°6'13". **9.** a) $m(\measuredangle COM) + m(\measuredangle BOM) = m(\measuredangle COB)$ şi $m(\measuredangle COM) + m(\measuredangle AOC) = m(\measuredangle MOA)$ conduce la $m(\measuredangle COM) = \frac{1}{2}(m(\measuredangle AOM) - m(\measuredangle BOM))$; b) $m(\measuredangle COM) = m(\measuredangle BOM) + m(\measuredangle COB)$ şi $m(\measuredangle COM) + m(\measuredangle AOC) = m(\measuredangle AOM)$, de unde, prin adunare, rezultă $m(\measuredangle COM) = \frac{1}{2}(m(\measuredangle BOM) + m(\measuredangle AOM))$; c) 30°.

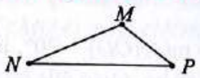
Testul 2. **1.** alungit. **2.** au acelaşi vârf, o semidreaptă comună, interioare disjuncte. **3.** 45°31'19". **4.** alungite. **5.** 90°. **7.** 90°. **8.** 96°. **9.** a) $m(\measuredangle BOD) + m(\measuredangle AOC) = m(\measuredangle COD) + m(\measuredangle AOB) + m(\measuredangle AOC) + m(\measuredangle AOC) = 2m(\measuredangle XOY) =$ constant; b) $m(\measuredangle BOD) - m(\measuredangle AOC) = m(\measuredangle BOX) + m(\measuredangle XOC) + m(\measuredangle COA) + m(\measuredangle AOY) + m(\measuredangle YOD) - m(\measuredangle AOC) = m(\measuredangle XOY) =$ constant; c) 75°.

Testul 3. **1.** 45°. **2.** Drepte; 90°. **3.** 180°. **4.** reflexivitatea, simetria, tranzitivitatea. **5.** unghiurile cu vârful în O. **6.** 100°. **7.** 90°. **8.** 360°. **9.** a) $m(\measuredangle AOB) = 128°$; $m(\measuredangle BOC) = 64°$; $m(\measuredangle AOC) = 168°$.

Testul 4. **1.** 90°. **2.** egale; au aceeaşi măsură. **3.** obtuz. **4.** 24°, 48°, 72°, 96°, 120°. **5.** 50°. **6.** nu este alungit sau nul. **7.** 75°20'. **8.** 14°52'37". **9.** formează unghiuri opuse la vârf care sunt congruente.

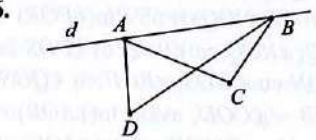
CAPITOLUL III. TRIUNGHIUL

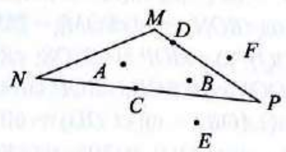
1. Triunghiul: definiţie, vârfuri, laturi, unghiuri. Perimetrul triunghiului

1. 

vârfuri: M, N, P; laturi: $[MN]$, $[PN]$, $[MP]$; unghiuri: $\measuredangle MNP$, $\measuredangle PNM$, $\measuredangle NMP$.

2. a) $[BC]$; b) $\measuredangle C$; c) $\measuredangle B$ şi $\measuredangle C$. **3.** 4 triunghiuri: PQR, PQH, PRH, QRH. **4.** a) ABF, ABD, ABE, ABC; b) FBD, EBC. **5.** Adevărate: a), b), iar restul false.

6. 

7. 

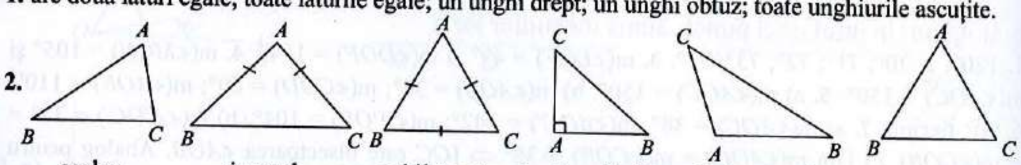
8. a) 11,4 cm; b) 10,5 cm; c) 7,2 cm. **9.** a) $BC = 4$ cm; $AC = 2,4$ cm; $AB = 3,2$ cm; b) 6 cm, 8 cm, 10 cm.

2. Construcţia triunghiurilor

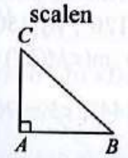
10. a) Un triunghi ar avea un unghi drept şi unul obtuz, imposibil; b) Un triunghi ar avea un unghi impropriu, imposibil; c) $AC + BC = AB$ (suma lungimilor a două laturi este egală cu a treia latură).

3. Triunghi isoscel, echilateral, dreptunghic, obtuzunghic, ascuţitunghic

1. are două laturi egale; toate laturile egale; un unghi drept; un unghi obtuz; toate unghiurile ascuţite.

2. 

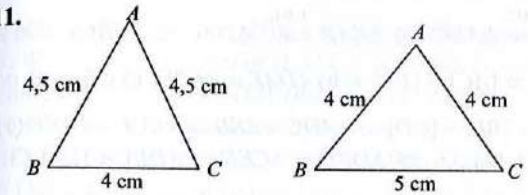
scalen isoscel echilateral dreptunghic isoscel obtuzunghic ascuţitunghic

3. 

$\measuredangle A =$ unghi drept; $BC =$ ipotenuză; $AC, AB =$ catete.

4. PR şi $m(\measuredangle Q) = 90°$. **5.** a) N şi $[MR]$; b) R şi $[MN]$; c) M şi $[RN]$. **6.** a) A şi $[BC]$; b) B şi $[AC]$ sau C şi $[AB]$. **7.** a) 8,2 cm; b) 12,6 cm. **8.** a) 13 cm; b) 17 cm sau 16 cm.

9. a) obtuzunghic; b) dreptunghic isoscel; c) echilateral. **10.** a) dreptunghic; b) obtuzunghic; c) ascuţitunghic; d) echilateral.

11. 

4. Congruenţa triunghiurilor

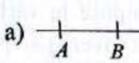
1. a) Definiţia. b) $\measuredangle M \equiv \measuredangle Q$; $\measuredangle N \equiv \measuredangle R$ şi $\measuredangle P \equiv \measuredangle S$, respectiv $[MN] \equiv [QR]$; $[NP] \equiv [RS]$ şi $[MP] \equiv [QS]$. **2.** Înseamnă aceleaşi congruenţe de unghiuri şi respectiv de laturi. **3.** Nu, ordinea literelor nu este corectă, $\Delta QRS \equiv \Delta VTU$. **4.** $\Delta BAC \equiv \Delta B'A'C'$; $\Delta BCA \equiv \Delta B'C'A'$; $\Delta CAB \equiv \Delta C'A'B'$; $\Delta CBA \equiv \Delta C'B'A'$. **5.** isoscel. **6.** Reflexivă: $\Delta ABC \equiv \Delta ABC$. Simetrică: Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP \Rightarrow \Delta MNP \equiv \Delta ABC$. Tranzitivă: Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ şi $\Delta MNP \equiv \Delta A'B'C'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. **7.** echilateral. **8.** a) isoscel. b) echilateral. **9.** $m(\measuredangle P) = m(\measuredangle A) = 30°$; $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle H) = 45°$, $m(\measuredangle D) = m(\measuredangle C) = 105°$. **10.** $QR = AB = 3$ cm; $RH = BC = 5$ cm; $QH = AC = 4$ cm. **11.** a) nu; b) $\measuredangle B \equiv \measuredangle R$ sau $[AC] \equiv [QP]$. **12.** a) figura; b) $\measuredangle A \equiv \measuredangle M$; $\measuredangle B \equiv \measuredangle N$; $\measuredangle C \equiv \measuredangle P$; c) $MN = 4$ cm şi $MP = 8$ cm. **13.** a) $AB = 4$ cm; $BC = 3$ cm; $AC = 5$ cm; b) $m(\measuredangle M) = 90°$, $m(\measuredangle N) = 30°$ şi $m(\measuredangle P) = 60°$. **14.** isoscele. **15.** a) adevărată; b) falsă. **16.** $MN = 5$ cm; $m(\measuredangle ACB) = 40°$. **17.** $AB = 5$ cm; $AC = 10$ cm; $BC = 6$ cm.

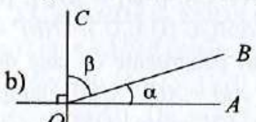
5. Criteriile (cazurile) de congruenţă ale triunghiurilor

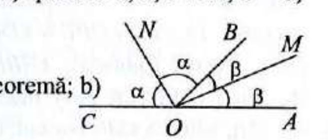
1. L.U.L.; U.L.U.; L.L.L.. **5.** a) $\Delta ABC \equiv \Delta PMN$, de unde $MN = BC = 5$ cm; b) $m(\measuredangle M) = 75°$ ($\Delta ABC \equiv \Delta NPM$); c) $m(\measuredangle P) = 37°$. **6.** a) cu f); b) cu d); c) cu e). **7.** a) $\Delta MNP \equiv \Delta HRD$; c) $\Delta SVR \equiv \Delta CDB$. **8.** a) $\Delta COB \equiv \Delta DOA$: $[OC] \equiv [OA]$; $\measuredangle O =$ comun; $[OB] \equiv [OD]$ (L.U.L.); b) $[AD] \equiv [BC]$; $\measuredangle ODA \equiv \measuredangle CBO$; $\measuredangle OCB \equiv \measuredangle OAD$. **9.** a) $\Delta OBC \equiv \Delta OAC$: $\measuredangle COA \equiv \measuredangle COB$; $[OC] =$ latură comună; $\measuredangle BCO \equiv \measuredangle ACO$ (U.L.U.); b) $[OA] \equiv [OB]$; $[BC] \equiv [CA]$; $\measuredangle OBC \equiv \measuredangle OAC$. **10.** a) $\Delta MNP \equiv \Delta QNP$: $[MN] \equiv [NQ]$; $[MP] \equiv [PQ]$; $[NP]$ latură comună (L.L.L.); b) $\measuredangle NMP \equiv \measuredangle NQP$; $\measuredangle MNP \equiv \measuredangle PNQ$; $\measuredangle MNP \equiv \measuredangle NPQ$. **11.** $m(\measuredangle QRP) = 60°$, $ST = 4$ cm. **12.** $\Delta MBN \equiv \Delta MAP$: $[MA] \equiv [MP]$; $\measuredangle M =$ comun; $[MA] \equiv [MB]$ (L.U.L.).

6. Elemente de raţionament geometric

1. a) Eu am note bune; b) Sandu este pe stadion; c) Fratelui meu îi place joaca. **2.** b) Ipoteza: $a, b, m \in \mathbb{N}$, $m \mid a$, $m \mid b$. Concluzia: $m \mid (a + b)$; c) Ipoteza: $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$. Concluzia: $a^n : a^m = a^{n-m}$; d) Ipoteza: $a, b, c \in \mathbb{N}$, $c \leq b$. Concluzia: $a(b - c) = ab - a \cdot c$; e) Ipoteza: $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a = b$, $b = c$. Concluzia: $a = c$.

3. a) 

b) 

5. definiţie. **6.** a) teoremă; b) 

7. Metoda triunghiurilor congruente

2. $\Delta ADC \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta BDC$. **3.** $\Delta AED \overset{\text{U.L.U.}}{\equiv} \Delta CFB$. **4.** a) $\Delta AOC \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta BOD$; b) $\Delta AOD \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta COB$; c) $\Delta ACD \overset{\text{L.L.L.}}{\equiv} \Delta BDC$; d) Analog c). **5.** $\Delta ACB \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta DCE \Rightarrow \measuredangle EAB \equiv \measuredangle BDE$. **6.** $\Delta ABC \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta CDA \Rightarrow \measuredangle ACB \equiv \measuredangle CAD$. **7.** $\Delta AOM \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta BOM$. **8.** $\Delta AOQ \overset{\text{L.L.L.}}{\equiv} \Delta BOQ \Rightarrow \measuredangle AOQ \equiv \measuredangle BOQ$. **9.** $\Delta BAN \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta CAM \Rightarrow [BN] \equiv [MC]$. **10.** $\Delta AED \overset{\text{U.L.U.}}{\equiv} \Delta BFC \Rightarrow \measuredangle AED \equiv \measuredangle CFB$. **11.** $\Delta ACG \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta BCH \Rightarrow AG = BH$. **12.** a) $\Delta ACO \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta BCO \Rightarrow \measuredangle ACO \equiv \measuredangle BCO$; b) $[AC] \equiv [BC]$. **13.** $\Delta AOB \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta A'OB' \Rightarrow AB = A'B'$. Analog $AC = A'C'$ şi $BC = B'C' \Rightarrow \Delta ABC \overset{\text{L.L.L.}}{\equiv} \Delta A'B'C'$. **14.** a) $\Delta AOB \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta DOC \Rightarrow [AB] \equiv [CD]$ şi $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle DCB$. b) Din a) $\Delta ABC \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta DCB$. **15.** $\Delta COB \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta DOA \Rightarrow [BC] \equiv [AD]$. **16.** $\Delta ACD \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv}$

$\overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta AEB \Rightarrow [BE] \equiv [CD]$. **17.** a) $\Delta ADB \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta AEC$. b) $\Delta EAB \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta DAC \Rightarrow [EB] \equiv [DC]$. **18.** $m(\sphericalangle AOB) = 75°$. **19.** a) $\Delta AEC \overset{\text{U.L.U.}}{\equiv} \Delta BDC \Rightarrow [AC] \equiv [BC]$ şi b) $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EBD$; c) diferenţă de segmente congruente. **20.** a) $\Delta DAC \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta EAB \Rightarrow [BE] \equiv [CD] \Rightarrow \sphericalangle ADC \equiv AEB \Rightarrow \sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle CEF$ (1) şi $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ABE$ (2). b) Din (1), (2) şi cazul U.L.U. $\Rightarrow \Delta DBF \equiv \Delta CEF \Rightarrow [DF] \equiv [EF]$ (3); c) $\Delta ADF \overset{\text{L.L.L.}}{\equiv} \Delta AEF \Rightarrow \sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle EAF$ şi $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle EFA$, adică d). **21.** a) $\Delta ACB \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta ANM \Rightarrow$ $\Rightarrow BC = MN$; b) $\sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle BCA$; c) $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$. **22.** a) $\Delta ABC \overset{\text{L.U.L.}}{\equiv} \Delta CFE \Rightarrow [BD] \equiv [CE]$ şi $\sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle ACF$ (1). b) $\Delta DBC \overset{\text{L.L.L.}}{\equiv} \Delta ECB \overset{(1)}{\Rightarrow} \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB \Rightarrow$ c) din b) şi (1) $\Rightarrow \sphericalangle FBC \equiv \sphericalangle FCB$. **23.** a) $IU = IN + NU$ şi $IT = IL + LT$. Cum $[IN] \equiv [IL]$ şi $[IU] \equiv [IT]$, atunci $[NU] \equiv [LT]$. Pentru b), c) şi d) avem, pe rând: (i) $\Delta LIU \equiv \Delta NIT$ (L.U.L.): $[IN] \equiv [IL]$, $\sphericalangle TIU$ = comun; $[IU] \equiv [IT] \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle LUI \equiv \sphericalangle NTI$ (1); (ii) $\Delta LAT \equiv \Delta NAU$ (U.L.U.): $\sphericalangle ANU \equiv \sphericalangle ALT$; $[LT] \equiv [NU]$, din a), $\sphericalangle LTA \equiv$ $\equiv \sphericalangle AUN \Rightarrow [LA] \equiv [AN]$ (2); (iii) $\Delta LIA \equiv \Delta AIN$ (L.L.L.): $[IL] \equiv [IN]$, $[LA] \equiv [AN]$, din (2), $[IA]$ comună. Avem $\sphericalangle LAI \equiv \sphericalangle NAI$, adică IA bisectoarea $\sphericalangle NAL$; c) şi $\sphericalangle LIA \equiv \sphericalangle AIN$, adică IA bisectoarea $\sphericalangle LIN$ (b). **24.** a) $\Delta OPN \equiv \Delta OMQ$ (U.L.U.): $\sphericalangle O$ = comun, $[OP] \equiv [OM]$, $\sphericalangle OPN \equiv \sphericalangle OMQ \Rightarrow [ON] \equiv$ $\equiv [OQ]$ (1); b) $[ON] = [OM] + [MN]$; $[OQ] = [OP] + [PQ]$. Din a) şi din ipoteză rezultă $[MN] \equiv$ $\equiv [PQ]$ (2); Pentru c), d) arătăm: (i) $\Delta MRN \equiv \Delta PRQ$ (U.L.U.); $\sphericalangle RMN = 180° - \sphericalangle OMR$ şi $\sphericalangle PRQ =$ $180° - \sphericalangle OPN$, de unde $\sphericalangle RMN \equiv \sphericalangle PRQ$; $[MN] \equiv [PQ]$, din (2), $\sphericalangle RMN \equiv \sphericalangle PQR$ (diferenţe de unghiuri congruente). Avem $[PR] \equiv [MR]$ (3); (ii) $\Delta OPR \equiv \Delta OMR$ (L.L.L.): $[OR]$ = comună, $[RM] \equiv [PR]$ (3), $[OM] \equiv [OP]$, din ipoteză. Avem $\sphericalangle POR \equiv \sphericalangle ROM$, adică OR bisectoarea $\sphericalangle POM$ şi $\sphericalangle PRO \equiv \sphericalangle MRO$, adică OR bisectoarea $\sphericalangle PRM$.

8. Recapitulare şi sistematizare prin teste

Testul 1. 1. congruente; C.C. **2.** BC; $\sphericalangle C$. **3.** $[DE]$; $[BC]$; $\sphericalangle E$; $\sphericalangle A$. **4.** obtuzunghic. **5.** a) ΔRST; b) $[RT]$; c) $\sphericalangle NPM$; d) $\sphericalangle TRS$. **7.** a) $\Delta APD \equiv \Delta AFD$ (L.U.L.): $[AP] \equiv [FD]$ $\left(\frac{[AE]}{2} = \frac{[DE]}{2}\right)$; $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle FDA$ (ΔAED isoscel); $[AD]$ comună $\Rightarrow [AF] \equiv [PD]$; b) $\Delta APC \equiv \Delta DFB$ (L.U.L.): $[PA] \equiv [FD]$ (din a)); $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle FDB$ (ΔADE isoscel); $[AC] \equiv [BD]$ (sumă de segmente congruente); c) $\Delta APB \equiv \Delta CFD$ (L.U.L.): $[AP] \equiv [FD]$; $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle FDC$; $[AB] \equiv [CD]$.

Testul 2. 1. 3. **2.** echilateral. **3.** 78 sau 84. **4.** congruente. **5.** a) $\sphericalangle PNM$; b) $\sphericalangle PMQ$; c) $[NQ]$; d) bisectoare. **7.** a) Ne folosim de faptul că dacă ΔABC isoscel, D mijlocul lui BC, atunci $m(\sphericalangle ADB) =$ $= m(\sphericalangle ADC) = 90°$. Considerăm $\Delta PDE \equiv \Delta QDE$ (C.C.): $[PD] \equiv [DQ]$; $[PE]$ comună $\Rightarrow \sphericalangle PED \equiv$ $\equiv \sphericalangle QED$. În plus, $\sphericalangle DPE \equiv \sphericalangle DQE$ (1); b) $\Delta NBP \equiv \Delta MQC$ (U.L.U.): $\sphericalangle NBP \equiv \sphericalangle MCQ$ (ΔABC isoscel); $[BP] \equiv [QC]$ (ipoteză); $\sphericalangle NBP \equiv \sphericalangle MQC$ (unghiuri congruente cu cele din (1) ca opuse la vârf). Rezultă $[NB] \equiv [MC]$ (2). Imediat $AN = AB - NB$, $AM = AC - MC$ şi din ipoteză şi (2) avem $[AN] \equiv$ $\equiv [AM]$, adică ΔAMN isoscel; c) Din b), $\Delta NBP \equiv \Delta MQC$ avem $\sphericalangle QMC \equiv \sphericalangle PNB$.

Testul 3. 1. echilateral. **2.** Un adevăr ce nu necesită demonstraţie. **3.** L.U.L.; U.L.U.; L.L.L. **4.** congruent. **5.** a) $\sphericalangle C$; b) $\sphericalangle C$; c) BC; d) AC. **7.** a) Punctele C, O, D coliniare; C, D în semiplane diferite; b) $[AD] \equiv [BC]$ (din $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$ (L.U.L.)); c) Din b), $[AD] \equiv [BC]$; $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (L.L.L.): $[AC] \equiv [BD]$ (ipoteză); $[AB]$ comună; $[AD] \equiv [BC]$ (din b)).

Testul 4. 1. necesită demonstraţie. **2.** $[AB] \equiv [MN]$; $[BC] \equiv [NP]$; $[AC] \equiv [MP]$; $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$; $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$; $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. **3.** 5; 4; 60°; 75°. **4.** echilateral. **5.** a) ΔQNP (L.L.L.); b) $\sphericalangle PMN$; c) $\sphericalangle PNQ$; d) $\sphericalangle PNM$. **7.** a) $\Delta AMB \equiv \Delta ANC$ (L.U.L.): $[AB] \equiv [AC]$ (ipoteză); $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACN$ (diferenţe de unghiuri congruente); $[CN] \equiv [MB]$ (ipoteză) $\Rightarrow [AM] \equiv [AN]$; b) $\Delta AMP \equiv \Delta AQN$ (L.U.L.): $[AM] \equiv [AN]$ (din a)); $\sphericalangle MAP \equiv \sphericalangle QAN$ (sume de unghiuri congruente); $[AP] \equiv [AQ]$ (ipoteză) $\Rightarrow \sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle ANQ$. În plus, $[MP] \equiv [QN]$; c) $\Delta MPC \equiv \Delta NQB$ (L.L.L.): $[PC] \equiv [QB]$ (diferenţe de segmente congruente); $[MP] \equiv$ $\equiv [QN]$ (din b)); $[BN] \equiv [MC]$ (sumă de segmente congruente).

Probleme pentru pregătirea concursurilor şcolare

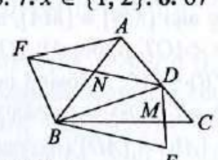
1. 45°. **2.** $\Delta AOD \equiv \Delta AOB$ (L.U.L.): $[OA]$ latură comună; $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle AOB$ (suplemente de unghiuri congruente); $[OD] \equiv [OB]$ (din ipoteză, $\Delta OCB \equiv \Delta OCD$). Urmează că $[AB] \equiv [AD]$. **3.** a) 60°; b) $\sphericalangle ANM = 120°$, deci NC bisectoare. **4.** $\Delta AMC \equiv \Delta DMB$ (U.L.U.): $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle MBD$ (ipoteză); $[CA] \equiv [BD]$ (ipoteză); $\sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle BDM$ (diferenţe de unghiuri congruente). Urmează că $[AM] \equiv$ $\equiv [MB]$, adică M mijlocul lui $[AB]$. **5.** Din unghiul format de bisectoarea interioară şi cea exterioară (cele două sunt perpendiculare) urmează că $m(\sphericalangle MAD) = m(\sphericalangle NAD) = 90°$. Imediat $\Delta MAD \equiv \Delta NAD$ (C.C.): $[AM] \equiv [AN]$; $[AD]$ comună, de unde $[MD] \equiv [DN]$, adică ΔMDN isoscel. În plus, $\sphericalangle MDA \equiv$ $\equiv \sphericalangle NDA$ (1); b) $\Delta ABD \equiv \Delta ADE$ (U.L.U.): $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle EAD$ ($[AD]$ bisectoare); $[AD]$ latură comună; $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADE$ (din (1)). Urmează că $[AB] \equiv [AE]$ (2); $\Delta AMB \equiv \Delta ANE$ (L.U.L.): $[AM] \equiv [AN]$ (ipoteză); $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAE$ (unghiuri formate de bisectoarea exterioară); $[AB] \equiv [BE]$ (din (2)). **6.** a) $\Delta MPB \equiv \Delta NPC$ (U.L.U.): $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle NCP$ (diferenţe de unghiuri congruente în două triunghiuri isoscele); $[PB] \equiv [NC]$ (ipoteză); $\sphericalangle MPB \equiv \sphericalangle NPC$ (opuse la vârf). De aici $[MB] \equiv [NC]$; b) $\Delta BPA \equiv$ $\equiv \Delta CPA$ (L.L.L.): $[PB] \equiv [PC]$ (ipoteză); $[PA]$ latură comună; $[AB] \equiv [AC]$ (ipoteză). De aici $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PAC$. **7.** $m(\sphericalangle AOB) = 15°$; $m(\sphericalangle BOC) = 75°$; $m(\sphericalangle COD) = 60°$; $m(\sphericalangle DOE) = 30°$. **8.** Metoda reducerii la absurd: Presupunem $\Delta ABC \not\equiv \Delta A'B'C'$. Construim atunci $[C'B''] \equiv [CB]$, $B'' \in B'C'$ astfel încât $\Delta A'B''C' \equiv \Delta ABC$. Imediat $A'B'' \equiv AB$. Dar dacă $B'' \in (B'C')$, atunci $A'B'' < A'B'$ şi $C'B'' \equiv$ $\equiv C'B'$ (1). Adunând în (1) membru cu membru găsim $A'B'' + C'B'' < A'B' + C'B'$, de unde $A'C' +$ $+ A'B'' + C'B'' < A'B' + C'B' + A'C'$. Cum $\Delta A'B''C' \equiv \Delta ABC$, obţinem $AB + AC + BC < A'C' +$ $+ B'C' + A'B'$ (2), absurd. Urmează că $B'' \notin (B'C')$. Analog dacă $B'' \in B'C'$, $B' \in B''C'$, obţinem relaţia (2) cu sens schimbat. În concluzie $B'' \equiv B'$, adică $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. **9.** Arătăm pe rând: (i) $\Delta CMB \equiv \Delta CNB$ (L.U.L.): $[MB] \equiv [NB]$ (ipoteză); $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NBC$ (diferenţă de unghiuri congruente); $[BC]$ latură comună $\Rightarrow [CM] \equiv [CN]$ (1); $\sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle BCN$ (2). Acum $\Delta CDM \equiv \Delta CDN$ (L.U.L.): $[CM] \equiv [CN]$ (din (1)); $\sphericalangle MCD \equiv \sphericalangle NCD$ (diferenţă de unghiuri congruente – vezi (2)); $[CD]$ latură comună. **10.** a) $\Delta OBM \equiv \Delta OAM$ (L.U.L.): $[OA] \equiv [OB]$ (ipoteză); $\sphericalangle BOM \equiv \sphericalangle AOM$ (ipoteză); $[OM]$ latură comună. De aici $[MB] \equiv [MA]$, adică ΔAMB isoscel; b) $\Delta BOT \equiv \Delta AOT$ (L.U.L.): $[OT]$ latură comună; $\sphericalangle BOT \equiv \sphericalangle AOT$ (ipoteză); $[OB] \equiv [OA]$ (ipoteză). Imediat $\sphericalangle BTO \equiv \sphericalangle ATO$ şi suplementare, de unde $m(\sphericalangle OTB) = 90°$. Folosind faptul că unghiurile opuse la vârf sunt congruente, obţinem $m(\sphericalangle ATM) = 90°$; c) $m(\sphericalangle yOz) = 36°48'30''$, de unde $m(\sphericalangle yOz') = 143°11'30''$. **11.** 55°. **12.** $\Delta BAM \equiv \Delta DAM$ (L.U.L.): $[AB] \equiv [AD]$ (ipoteză); $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle DAM$; $[AM]$ latură comună. Avem $[BM] \equiv [MD]$ (1). Din $\Delta CBN \equiv \Delta CDN$ (L.U.L.): $[CB] \equiv [CD]$ (ipoteză); $\sphericalangle BCN \equiv \sphericalangle DCN$ (ipoteză); $[CN]$ latură comună. Avem $[BN] \equiv [DN]$ (2). În final $\Delta DMN \equiv \Delta BMN$ (L.L.L.): $[MN]$ latură comună şi apoi folosim (1) şi (2). **13.** a) $\Delta NDA \equiv \Delta MDB$ (U.L.U.): $\sphericalangle BMD \equiv \sphericalangle AND$ (au acelaşi suplement); $[ND] \equiv [MD]$ (ipoteză); $\sphericalangle NDA \equiv \sphericalangle MDB$ (opuse la vârf). De aici $[AN] \equiv [BM]$; b) $\Delta CMA \equiv \Delta CNB$ (U.L.U.): $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NBC$ (din a)); $[MA] \equiv [NB]$ (sumă de segmente congruente); $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BNC$ (suplemente de unghiuri congruente). De aici $[CM] \equiv [CN]$ (1). Cum $\Delta CMD \equiv \Delta CND$ (L.L.L.): $[CD]$ latură comună; $[DM] \equiv [DN]$ (ipoteză); $[CM] \equiv [CN]$ (din (1)). Urmează că $\sphericalangle CND \equiv \sphericalangle CDM$, adică CD bisectoarea unghiului $\sphericalangle MDN$. **14.** a) Vom demonstra că: (i) $\Delta ODE \equiv \Delta OCA$ (L.U.L.): $[OA] \equiv [OE]$ (ipoteză); $\sphericalangle EOD \equiv \sphericalangle COA$ (ipoteză); $[OD] \equiv [OC]$ (ipoteză). Avem $[DE] \equiv [CA]$ (1); (ii) $\Delta ODB \equiv \Delta OCB$ (L.U.L.): $[OD] \equiv [OC]$ (ipoteză); $\sphericalangle DOB \equiv \sphericalangle COB$ ((OB bisectoare); $[OB]$ latură comună. Imediat $[DB] \equiv [CB]$ (2); (iii) $\Delta OEB \equiv \Delta OAB$ (L.U.L.): $[OB]$ latură comună; $\sphericalangle EOB \equiv$ $\equiv \sphericalangle AOB$ (sumă de unghiuri congruente); $[OE] \equiv [OA]$ (ipoteză). Rezultă că $[EB] \equiv [AB]$ (3). Folosind (1), (2) şi (3), găsim că $\Delta ABC \equiv \Delta EBD$; b) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta EBD$ (4), avem că $\Delta EOB \equiv$ $\equiv \Delta AOB$ (L.L.L.): $[OE] \equiv [OA]$ (ipoteză); $[EB] \equiv [AB]$ (din (4)); $[OB]$ latură comună. Urmează că $\sphericalangle EOB \equiv \sphericalangle AOB$, adică ($OB$ este bisectoarea lui $\sphericalangle xOy$. **15.** 105°9'. **16.** $\Delta AMC \equiv \Delta ABN$ (L.U.L.): $[AM] \equiv [AB]$ (ipoteză); $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle BAN$ (sumă de unghiuri congruente); $[AC] \equiv [AN]$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\Rightarrow [MC] \equiv [BN]$. **17.** a) $\Delta PAD \equiv \Delta FAD$ (L.U.L.): $[PA] \equiv [FD]$ (jumătăţi de segmente congruente);

$\sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle FDA$ (ΔEAD isoscel); $[AD]$ latură comună. De aici $[AF] \equiv [PD]$; b) $\Delta PAB \equiv \Delta DFC$ (L.U.L.): $[PA] \equiv [FD]$ (jumătăți de segmente congruente); $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PDC$ (ΔEAD isoscel); $[AB] \equiv [CD]$ (ipoteză); c), d) Arătăm că $\Delta AEB \equiv \Delta DEC$ (L.U.L.): $[AE] \equiv [ED]$ (ipoteză – ΔEAD isoscel); $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle EDC$ (unghiuri de la baza ΔEAD); $[AB] \equiv [CD]$ (ipoteză). Urmează că $[EB] \equiv [EC]$ (1). Imediat d) $\Delta PBE \equiv \Delta EFC$ (L.L.L.): $[EP] \equiv [EF]$ (jumătăți de segmente congruente); $[PB] \equiv [FC]$ (din b)); $[EB] \equiv [EC]$ (din (1)). Imediat c), din congruența anterioară $\sphericalangle BPE \equiv \sphericalangle CFE$. **18.** a) $AB = 4{,}8$ cm; $AC = 8$ cm; $BC = 11{,}2$ cm; b) $\Delta AMD \equiv \Delta BMC$ (L.U.L.): $[BM] \equiv [MA]$ (M mijlocul lui $[AB]$); $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle AMD$ (opuse la vârf); $[MD] \equiv [MC]$ (M mijlocul lui $[DC]$). De aici $[AD] \equiv [BC]$ (1); $\Delta AEP \equiv \Delta PNC$ (L.U.L.): $[AP] \equiv [PC]$ (P mijlocul lui $[AC]$); $\sphericalangle APE \equiv \sphericalangle NPC$ (opuse la vârf); $[NP] \equiv [PE]$ (P mijlocul lui $[NE]$). De aici $[AE] \equiv [NC] = \frac{1}{2}[BC]$. **19.** a) Fie $\Delta MBE \equiv \Delta MCE$ (L.L.L.): $[MB] \equiv [MC]$ (ipoteză); $[BE] \equiv [EC]$ (ipoteză); $[ME]$ latură comună. Urmează că $\sphericalangle BEM \equiv \sphericalangle CEM$ și suplementare, adică $\sphericalangle BEM = 90°$ conduce la $AE \perp BC$; $\Delta ABE \equiv \Delta ACE$ dreptunghice (C.C.): $[AE]$ latură comună; $[BE] \equiv [EC]$. Imediat $[AB] \equiv [AC]$; b) $\Delta PBC \equiv \Delta QCB$ (U.L.U.): $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle QCB$ (ΔMBC isoscel); $[BC]$ latură comună; $\sphericalangle QBC \equiv \sphericalangle PCB$ (din a), ΔABC isoscel). De aici $[QC] \equiv [PB]$. **20.** Avem $\Delta ODC \equiv \Delta OBA$ (L.U.L.): $[OD] \equiv [OA]$ (ipoteză); $\sphericalangle DOC \equiv \sphericalangle BOA$ (ipoteză); $[OC] \equiv [OB]$ (ipoteză). Urmează că $[CD] \equiv [AB]$ (1); $\sphericalangle DCO \equiv \sphericalangle ABO$ (2). Imediat $\Delta CNO \equiv \Delta BMO$ (L.U.L.): $[CN] \equiv [BM]$ (jumătăți de segmente congruente); $\sphericalangle NCO \equiv \sphericalangle MBO$ (din (2)); $[OC] \equiv [OB]$ (ipoteză). Urmează că $[ON] \equiv [OM]$ (3) și $\sphericalangle NOC \equiv \sphericalangle MOB$ (4). Acum finalizăm: $\Delta OAN \equiv \Delta ODM$ (L.U.L.): $[OA] \equiv [OD]$ (ipoteză); $\sphericalangle AON \equiv \sphericalangle DOM$ (sumă de unghiuri congruente); $[ON] \equiv [OM]$ (vezi (3)). Din congruență avem că $[AN] \equiv [DM]$.

MODELE DE TEZE SEMESTRIALE

Teza 1. 1. 5. **2.** $\frac{55}{144}$. **3.** $a < b$. **4.** 0°. **5.** 100°. **6.** 8. **7.** $x \in \{1, 2\}$. **8.** 67°30'. **9.** 14 cm.

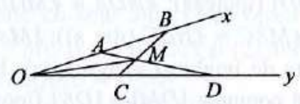
10. a) $64 = 2^6$; $960 = 2^6 \cdot 5 \cdot 3$; b) $2^6 = 64$. **11.** a)



b) ΔBDE isoscel, $BE \equiv BD$ (1);
ΔFBD isoscel, $BF \equiv BD$ (2)
Din (1) și (2) $\Rightarrow BE \equiv BF$;
c) Din b), notând $m(\sphericalangle FBN) = x$ și $m(\sphericalangle DBM) = y$, găsim $m(\sphericalangle FBE) = 2(x + y) = 120°$, de unde $x + y = 60°$. Cum $m(\sphericalangle ABC) = x + y$, avem $m(\sphericalangle ABC) = 60°$.

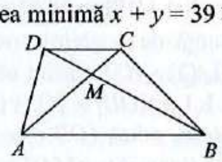
Teza 2. 1. $\frac{2}{9}$. **2.** 14, 21, 28. **3.** $0{,}13 < 0{,}(13) < 0{,}1(3)$. **4.** 70°. **5.** 4 cm. **6.** 72°. **7.** $x \in \{0, 1\}$. **8.** 3. **9.** 8.

10. a) 35; b) 19. **11.** a) $\Delta BOC \equiv \Delta DOA$ (LUL), de unde $\sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle ODA$; b) $\Delta AMB \equiv \Delta CMD$ (ULU): $CD \equiv AB$; $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MCD$; $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MDC$ (din b));
c) $\Delta AOM \equiv \Delta MOC$ (LLL) $\Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle MOC \Rightarrow OM$ bisectoare.



Teza 3. 1. $\frac{10}{7}$. **2.** 1008. **3.** $\frac{7}{36} < \frac{5}{24}$. **4.** 18. **5.** 45°. **6.** i) 14 cm; ii) 16 cm. **7.** 90°. **8.** 2,8. **9.** $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ (LUL), $MP = 4$ cm. **10.** a) 14; b) Cum $y \geq 8$, avem valoarea minimă $x + y = 39 > 3564$.

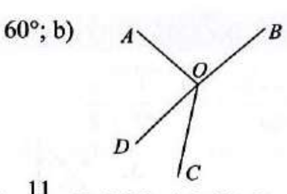
11. a) Fie $AD \cap BC = \{M\}$;
b) $\Delta CMA \equiv \Delta DMB$ (LUL), de unde $AC \equiv BD$;
c) ΔMCD isoscel, de unde $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$.



Teza 4. 1. $\frac{3}{4}$. **2.** 28. **3.** 1. **4.** 11. **5.** 180°. **6.** 90°. **7.** 15, 17, 19.

8. $A = \{12, 18, 24\}$. **9.** $AM = 4$ cm, $AB = 12$ cm. **10.** i) 7 și 28; ii) 14 și 21; iii) 0 și 35.

11. a) $x = 60°$; b)

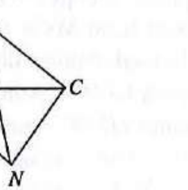


c) 60°.

Teza 5. 1. $\frac{11}{5}$. **2.** 0,(2) și 0,(6). **3.** a. **4.** 4. **5.** $\frac{15}{7} + \frac{6}{7}$. **6.** 50°. **7.** isoscel. **8.** $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

9. 12 ℓ. **10.** 72° și 108°.

11. a) $\Delta ABM \equiv \Delta NMC$ (LUL), de unde $AB \equiv NC$;
b) Din a), $\Delta ABM \equiv \Delta NMC$;
c) $\Delta MCA \equiv \Delta MBN$ (LUL), de unde $AC \equiv BN$.

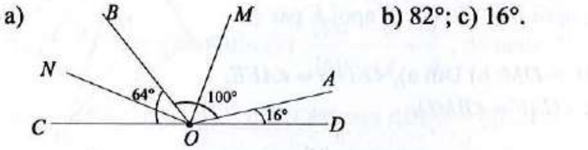


Teza 6. 1. $\frac{2}{15}$. **2.** 2. **3.** 18. **4.** $\{18, 36, 54, 72, 90\}$. **5.** 40°. **6.** 4, 6, 8, 10, 12. **7.** 2,(370). **8.** 75°.

9. Fie S mijlocul lui NP. Atunci $MS = MN + NS = SP + PQ = SQ$, de unde S mijlocul lui MQ.

10. $[0{,}(1)]^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ și $\left(\frac{1}{27}\right)^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^{24}$.

11. a)



b) 82°; c) 16°.

Teza 7. 1. $\frac{2}{15}$. **2.** $\{202, 404, 606, 808\}$ (am presupus că prima și ultima cifră este aceeași). **3.** $a < b$.

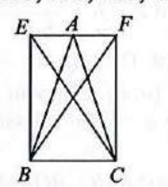
4. 6. **5.** 20°. **6.** 90°. **7.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{39} = \left(\frac{1}{27}\right)^{13}$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^{26} = \left(\frac{1}{16}\right)^{13}$. **8.** 36. **9.** 63°. **10.** 3,5 cm. **11.** a) 45 lei; b) 49,5 lei; c) 99%.

Teza 8. 1. $\frac{17}{12}$. **2.** $\frac{5}{24}$. **3.** 18. **4.** 15. **5.** $\{42, 45, 48\}$. **6.** 22°30'. **7.** 102°. **8.** 6. **9.** 4 cm. **10.** 115°.

11. a) 15; b) 86; c) 13.

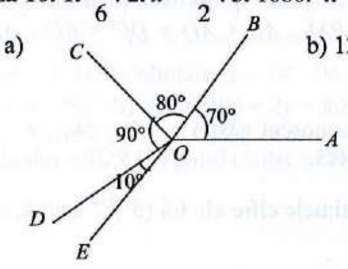
Teza 9. 1. $\frac{13}{6}$. **2.** $x = 2$. **3.** 6. **4.** $\{120, 150, 180, 105, 135, 165, 195\}$. **5.** 23. **6.** echilateral. **7.** 36 m.

8. $\frac{3}{5}$. **9.** 135°. **10.** 15, 17, 19. **11.** a) vezi figura:
b) $\Delta AEF \equiv \Delta AFC$ (ULU), de unde $AE \equiv AF$;
c) $\Delta EBC \equiv \Delta FCB$ (LUL), de unde $EC \equiv BF$.



Teza 10. 1. $\frac{5}{6}$. **2.** $x = \frac{1}{2}$. **3.** 1080. **4.** $\frac{43}{12}$. **5.** 138. **6.** 6. **7.** 52,32. **8.** 45°. **9.** 5. **10.** 118.

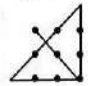
11. a)



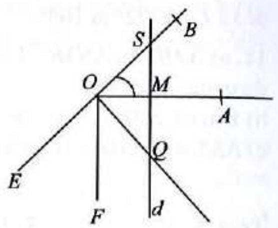
b) 120°; c) 110°.

PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADEI ŞI A CONCURSURILOR ŞCOLARE

1. $a=b=5$, $c=11$. **2.** Avem $\frac{1+2+\ldots+n}{n}+\frac{4n}{10}+\frac{1}{10}-\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2n}+\frac{2n}{5}+\frac{1}{10}-\frac{n}{2}=$ $=\frac{n+1}{2}+\frac{2n}{5}+\frac{1}{10}-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}-\frac{n}{2}=1$. **3.**



4. a) Se fixează punctele A şi O. Se construieşte mijlocul lui OA cu compasul. Fie M acest punct. Fie $\{S\}=d\cap OB$, unde d este mediatoarea lui OA. Cu compasul luăm $MS\equiv MQ$, $Q\in d$. Unim O cu Q şi găsim m($\sphericalangle MOQ$) = 23°. În final obţinem unghiul $\sphericalangle BOF$ = 115°;



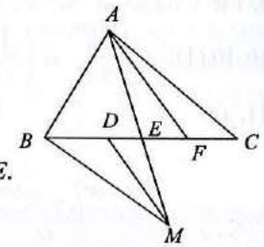
b) Fie OE semidreapta opusă lui $(OB$. Atunci m($\sphericalangle EOF$) = 65°. Construim $(Ox$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle EOF$. Atunci m($\sphericalangle OEx$) = 32°30'. Fie Oy bisectoarea unghiului $\sphericalangle OEx$. Atunci ajungem la m($\sphericalangle OEy$) = 16°15', care reprezintă unghiul căutat. *Obs.* La punctul a) folosim faptul că distanţele duse de pe mediatoare la capetele segmentului sunt egale.

5. a) Orice număr natural $p>3$ are una din formele $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, $k\in\mathbb{N}^*$. Cum p prim, p impar, deci resturile sale sunt ori 1, ori 3;

b) Se foloseşte rezultatul următor:

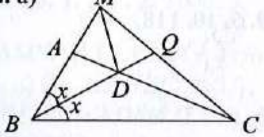
Un număr prim mai mare decât 3 este de forma $6k+1$ sau $6k+5$. Se analizează apoi pe cazuri: $p=6k+1$, apoi $p=6k+5$ şi apoi k par şi impar.

6. a) $\Delta AEF\equiv\Delta MED$ (LUL), de unde $AF\equiv DM$; b) Din a), $\sphericalangle EDM\equiv\sphericalangle AFE$. Atunci $\Delta BDM\equiv\Delta CFA$ (LUL), de unde $\sphericalangle CAF\equiv\sphericalangle BMD$.



7. a) Produsul elementelor din M este de forma $(2\cdot3\cdot5)^{(1+2+\ldots+10)\cdot10^3}=(3\cdot10)^{55\cdot10^3}=3^{55\cdot10^3}\cdot10^{55\cdot10^3}$. Urmează că produsul elementelor din M se termină în $55\cdot10^3$ zerouri; b) Din forma elementelor din M şi din faptul că în A sunt un număr impar de elemente, găsim întotdeauna posibilitatea ca două elemente din A să aibă exponenţii a, b, c de aceeaşi paritate. **8.** a) 45 drepte; b) Dacă există 3 puncte coliniare, atunci numărul maxim de drepte este de 43, deci mai mic decât 44. **9.** a) Din $\frac{a}{8}=\frac{c}{14}$ avem $14a=8c$, de unde $7a=4c$ (1). Cum 7 este prim, din (1), urmează $a=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Revenind în (1) găsim $14k=4c$, de unde $7k=2c$ şi repetând raţionamentul anterior $k=2s$, $s\in\mathbb{N}^*$, de unde $a=$ $=4s$; b) Din a), cum $a=4k$, găsim $k=b+\frac{4-b}{b+1}$, de unde $b\in\{0,1,2,4\}$. Obţinem $a=16$, $b=0$, $c=28$ sau $a=16$, $b=4$, $c=7$. **10.** Dacă $(a,b)=1$, obţinem $7ab=3a^2+2b^2$, egalitate imposibilă. Fie $a=dx$, $b=dy$, $(x,y)=1$, $d=(a,b)$. Obţinem $7xy=d(3x^2+y^2)$. Se observă că $d\in\{8,3\}$. Pentru $d=2$ găsim $x=1$, $y=2$, de unde $a=2$, $b=4$ sau $x=2$, $y=3$, de unde $a=4$, $b=6$. Pentru $d=3$, imposibil. **11.** 55°.

12. a)



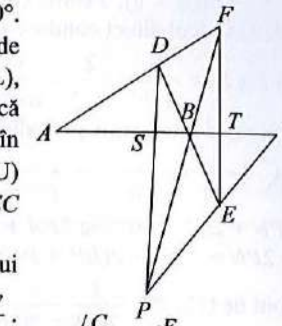
b) În ΔBMC, BQ înălţime şi bisectoare, deci BMC isoscel. Cum BQ şi mediatoare, $M\in BQ$, avem $DM\equiv DC$ (proprietate a mediatoarei); c) $\mathscr{P}_{\Delta DMA}=AM+AD+DM=BM-AB+AD+DC=BC-AB+$ $+AC=BC=5$.

13. Folosim teorema împărţirii cu rest. Notând x numărul necunoscut găsim $x-5=24q_1$, $x-5=$ $=40q_2$, $x-5=56q_3$. Imediat $x-5=[24,40,56]$, de unde $x=845$.

14. Avem $\frac{2007}{2^{2008}}=\frac{2007\cdot5^{2008}}{10^{2008}}$. Dar $5^{2008}=5\cdot(5^3)^{669}$. Cum ultimele cifre ale lui $(5^3)^{669}$ sunt 1, 2, 5,

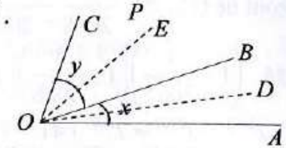
atunci ultimele cifre ale lui 5^{2008} vor fi 6, 2, 5, de unde ultimele cifre ale lui $2007\cdot5^{2008}$ vor fi 3, 7, 5, rezultă că ultimele trei zecimale ale lui $\frac{2007}{2^{2008}}$ vor fi 3, 7, 5.

15. Din $DS\perp AC$ şi $ET\perp AC$ urmează că $SD\parallel ET$. Dar ΔBEC echilateral, ET înălţime $\Rightarrow ET$ bisectoare, deci $\sphericalangle DEF=30°$. Din ΔABD echilateral urmează că $\sphericalangle SDB=30°$, printr-un raţionament analog.



Pe de altă parte, în ΔDEF avem $\sphericalangle FDE=120°$, de unde $\sphericalangle DFE=30°$. Avem ΔEDF isoscel, de unde $DF\equiv DE$ (1). Analog ΔDEF isoscel, de unde $DE\equiv EP$ (2). Imediat, din (1) şi (2) rezultă $\Delta DEP\equiv\Delta FDE$ (LUL), de unde $PD\equiv EF$ (3). Cum D, B, E şi F, B, P coliniare, urmează că $\sphericalangle DBP\equiv\sphericalangle EBF$, opuse la vârf, şi cum $\sphericalangle SDB\equiv\sphericalangle TEB=30°$ (4), avem în ΔBDP şi în ΔBEF că $\sphericalangle DPB\equiv\sphericalangle FEB$ (5). Imediat $\Delta DBP\equiv\Delta EBF$ (ULU) (din (3), (4) şi (5)). De aici $DB\equiv BE$ (6) şi în final $\Delta ADB\equiv\Delta BEC$ (echilaterale şi (6)) conduce la $AD\equiv BC$.

16. Fie $\sphericalangle AOB=x$, $\sphericalangle BOC=y$. Construim OD bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ şi OE bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$. Atunci m($\sphericalangle DOE$) $=\frac{x+y}{2}$.

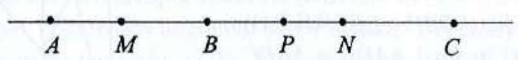


Din ipoteză găsim $\frac{180°-(x+y)}{(180°-x)+(180°-y)}=\frac{1}{4}$ (1).

Notând $z=x+y$, găsim din (1) $\frac{180°-z}{360°-z}=\frac{1}{4}$, de unde $720°-4z=360°-z$ (2), adică $3z=360°$. Imediat $z=120°$, deci $\frac{z}{2}=60°$. Obţinem $\sphericalangle DOE=60°$. **17.** a) $A=72\cdot72^n+3\cdot3^{2n}+6\cdot2^{3n}\cdot3^{2n}\cdot6=$ $=72\cdot8^n\cdot9^n+12\cdot2^{3n}\cdot3^{2n}+6\cdot2^{3n}\cdot3^{2n}=72\cdot2^{3n}\cdot3^{2n}+12\cdot2^{3n}\cdot3^{2n}+6\cdot2^{3n}\cdot3^{2n}=2^{3n}\cdot3^{2n}\cdot90=$ $=15(2^{3n}\cdot3^{2n}\cdot6)$, de unde $15\mid A$; b) Avem, ţinând cont de ipoteză, $\frac{a+2}{a}=\frac{b+5}{b}=\frac{c+7}{c}=k$, de unde $1+\frac{2}{a}=1+\frac{5}{b}=1+\frac{7}{c}=k$. De aici $3+\frac{2}{a}+\frac{5}{b}+\frac{7}{c}=3k$. Cum $3+81=3k$, găsim $k=28$. Imediat $\frac{2}{a}=27$, de unde $a=\frac{2}{27}$. Analog $b=\frac{5}{27}$, $c=\frac{7}{27}$. În final, $a+b+c=\frac{14}{27}$, ceea ce conduce la $(a+b+c):\frac{14}{27}=1$; c) Notăm p = numărul „punctelor" de lucru. Avem $1+3+3^2+\ldots+$ $+3^{p-1}=1093$ (1). Dar $1+3+3^2+\ldots+3^{p-1}=\frac{3^p-1}{2}$ şi înlocuind în (1), găsim ecuaţia $\frac{3^p-1}{2}=$ $=1093$, echivalentă cu $3^p=2187$. De aici $3^p=3^7$, de unde $p=7$. **18.** a) Avem $3^4\cdot3^5\cdot3^6\cdot\ldots\cdot3^{63}=$ $=3^{4+5+\ldots+63}=3^{1910}$. De aici $x=\frac{a+8^{1004}}{a+3^{2008}}=\frac{a+2^{3012}}{a+3^{2008}}=\frac{a+8^{1004}}{a+9^{1004}}<1$; b) Analog $3+3^2+\ldots+3^{299}=$ $=\frac{3^{300}-1}{2}=\frac{3^{300}-3}{2}$. Atunci $y=\frac{10^{150}}{3^{300}-3}=\frac{10^{150}}{9^{150}-3}$. Cum $10^{150}>9^{150}>9^{150}-3$ găsim $y>1$. Din a) obţinem $x<y$. **19.** Notăm m($\sphericalangle BOR$) $=y$. Găsim m($\sphericalangle AOD$) $=2y$, m($\sphericalangle BOM$) $=x$. Din m($\sphericalangle AOM$) $=$ $=130°$, A, O, B coliniare, $x=50°$. Pe de altă parte, $\sphericalangle AOM=2y+x$, de unde $y=40°$; a) m($\sphericalangle ROM$) $=$ $=x+y=90°$; b) m($\sphericalangle AOD$) $=2y=80°$; c) Fie $(OM'$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ şi $(OR'$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOR$. Unghiul căutat va fi $\sphericalangle M'OR'$. Avem m($\sphericalangle M'OR'$) $=x+y=\frac{y}{2}=50°+40°+20°=$

$= 110°$. **20.** Notăm $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2006}$. Obținem șirul de relații: $\frac{S+2006+2008}{2008} = 2007$, de unde $S = 2006 \cdot 2007$. Imediat $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2006}}{2006} = \frac{2006 \cdot 2007}{2006} = 2007$. **21.** Notăm $N = \overline{abc}$, a, b, c cifre. Obținem $D = \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 9 \cdot 11 \cdot (a - c) = 3^2 \cdot 11(a - c)$. Pentru ca D să fie pătrat perfect trebuie ca $a - c = 11$, imposibil, a, c cifre. **22.** a) Calcul direct conduce la $a = 2^n + 1$, $b = 2^n$, $c = 2^n - 1$;

b) Fie $N = \frac{1}{a \cdot b} + \frac{2}{b \cdot c} - \frac{3}{a \cdot c} = \frac{c+2a-3b}{a \cdot b \cdot c} = \frac{2^n - 1 + 2 \cdot 2^n + 2 - 3 \cdot 2^n}{a \cdot b \cdot c} = \frac{1}{a \cdot b \cdot c}$. Cum a, b, c consecutive, N este fracție periodică mixtă.

23. 

Din ipoteză, $PN + NC = \frac{AC}{2}$, de unde $2PN + 2NC = AC$ sau $2PN + BC = AC$ (1). Avem $2(MN + PN) = 2MN + 2PN = 2[MB + BP + PN] + 2PN = 2MB + 2(BP + PN) + 2PN = AB + 2BN + 2PN = AB + BC + 2PN = AB + AC$ (am ținut cont de (1)). **24.** $\frac{1}{2008} - \frac{1}{2008 \cdot 2009} = \frac{2009-1}{2008 \cdot 2009} = \frac{2008}{2008 \cdot 2009} = \frac{1}{2009}$.

25. $\left(1 - \frac{1}{2007}\right)\left(1 - \frac{1}{2008}\right)\left(1 - \frac{1}{2009}\right) = \frac{2006}{2007} \cdot \frac{2007}{2008} \cdot \frac{2008}{2009} = \frac{2006}{2009}$. **26.** 1. **27.** Notând $N = 7^{2009} - 7^{2008} - 7^{2007} = 7^{2007} \cdot 41 = 7^{2005} \cdot 49 \cdot 41 = 2009 \cdot 7^{2005}$, de unde $2009 \mid N$.

Cuprins

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

Capitolul I. Divizibilitatea numerelor naturale (I)

Capitolul II. Divizibilitatea numerelor naturale (II)

Capitolul III. Operații cu numere raționale pozitive

Ecuații în $\mathbb{Q}_+$

GEOMETRIE

certificat de recunoaştere
a calităţilor de

matesuperman

Nota..............

dat de **Superman Mate**

pentru..

din clasa..........**şcoala**..

FELICITĂRI! SUCCES ÎN CONTINUARE!

Pentru conformitate,

Profesor..

Data..................................**Anul şcolar**..............................

Semnătura | Ştampila şcolii

IMPORTANT! Scanaţi acest certificat şi expediaţi-l între 10 şi 15 iunie prin e-mail la adresa: **matematician@edituraparalela45.ro** sau prin poştă la adresa: Editura Paralela 45 (**Matematicianul anului**), str. Fraţii Goleşti, nr. 130, Piteşti, 110174. Veţi putea astfel participa la marele concurs **Matematicianul anului** ale cărui premii constau în 20 de tablete superinteligente!